В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

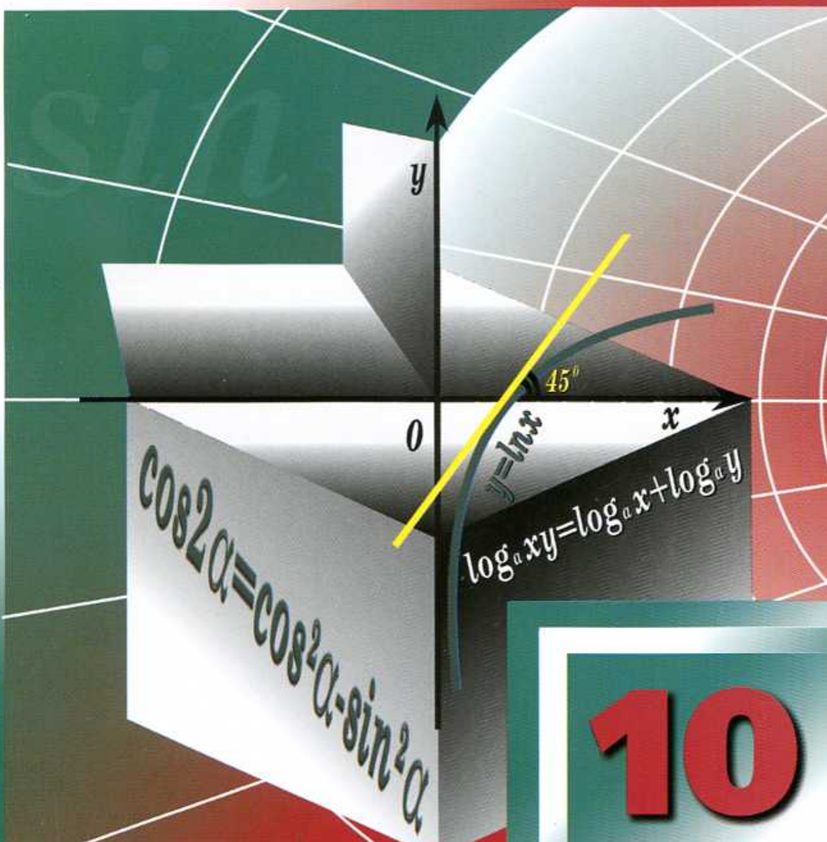
А.Н. РУРУКИН, Л.Ю. ХОМУТОВА, О.Ю. ЧЕКАНОВА

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

по

АЛГЕБРЕ *и* НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

К УМК А.Г. *Мордковича*



10 КЛАСС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А. Н. РУРУКИН
Л. Ю. ХОМУТОВА
О. Ю. ЧЕКАНОВА

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

к УМК
А.Г. Мордковича и др.
(М.: Мнемозина)

НОВОЕ ИЗДАНИЕ

10 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2012

УДК 372:851
ББК 74.262.21
Р87

Р87 **Рурукин А.Н., Хомутова Л.Ю., Чеканова О.Ю.**
Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс. – М.: ВАКО, 2012. – 352 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00614-4

Пособие предлагает полный комплект поурочных разработок по алгебре и началам анализа для 10 класса, ориентированных на педагогов, работающих по учебному комплекту А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина). Издание содержит все, что необходимо для качественной подготовки к урокам: подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, самостоятельные, контрольные и зачетные работы с подробным разбором. Предлагаемый материал достаточен для проведения полноценных уроков в классах и группах различного уровня.

Книга будет полезна как начинающим педагогам, так и преподавателям со стажем.

УДК 372:851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00614-4

Предисловие

В 10 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – начала математического анализа. Этот раздел характеризуется своеобразными логикой, подходами, методикой. Поэтому очень важно сразу заложить грамотное понимание основ высшей математики. Помимо подготовки к экзамену, такое понимание будет способствовать обучению высшей математике в вузе. Также в этом классе продолжается изучение алгебры – детально рассматриваются тригонометрические функции, уравнения и неравенства. Такой материал крайне необходим при изучении точных наук в вузе.

Время обучения в десятом классе необходимо рассматривать как период целенаправленной подготовки к сдаче ЕГЭ, так как варианты заданий этого экзамена состоят из значительного количества задач, содержащих изучаемый материал.

Данное пособие преследует три основные цели: помочь в изучении материала по алгебре и началам анализа для 10 класса, подготовке по этим разделам к успешной сдаче ЕГЭ и использованию полученных знаний при обучении в вузе. Пособие составлено для УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина). Нумерация задач в поурочном планировании дана для задачника этого УМК.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько *расширен* изучаемый *материал*: более детально изучены свойства функций и способы построения их графиков, тригонометрические функции, уравнения, неравенства, производные и способы их применения.

Такое расширение материала вполне доступно для десятиклассников, развивает их интерес к изучению предмета и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к успешной сдаче ЕГЭ и дальнейшему эффективному обучению в вузе.

Предусмотрены два вида фронтального контроля успеваемости: контрольные и зачетные работы. Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется или учителем, или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом к оценке. В контрольной работе приводится на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора для учащихся. В пособии приведены 6 контрольных работ.

Зачетные работы приведены для коррекции результатов контрольных работ. Задачи в них разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество задач может быть набрано из разных блоков. Для получения высшей оценки необходимо решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора в решении задач. Приведены 5 зачетных работ по темам.

В конце года проводится итоговая контрольная работа, которая проверяет навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы приведены или с ответами, или с полным разбором сложных задач. Его можно разместить на стенде, так как решить все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Математические диктанты в пособии не предусмотрены, так как, на наш взгляд, малоэффективны при обучении и отнимают значительное время от уроков.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

Рекомендации к проведению уроков

Данное пособие позволяет проводить занятия с использованием базового УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина) и рассчитано на 82 урока в год. Содержание пособия является *избыточным* (в расчете на очень подготовленный, сильный класс). При необходимости часть материала опускается или излагается достаточно поверхностно. Более сложный материал может быть использован при проведении факультативных занятий, олимпиад, математических вечеров. Учитывая сложность курса, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании *сдвоенные уроки* алгебры. Поурочное планирование включает в себя четыре вида занятий:

1. Урок изучения нового материала.
2. Урок отработки и закрепления пройденного материала.
3. Письменный опрос, самостоятельная работа, контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

Урок изучения нового материала включает в себя семь этапов.

I. Сообщение темы и цели урока делает учитель (~1–2 мин). Требуется донести до учащихся необходимость изучения данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены).

II. Изучение нового материала (основные понятия) (~15 мин) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует ответы учащихся. Однако такой подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем или отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее решить задачу самостоятельно, чем просто узнать ее решение).

III. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания новых понятий, терминов, алгоритмов решения задач и т. д. (~5 мин). Вопросы можно задаваться как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание, а не на механическое запоминание. Для этого рекомендуется, кроме определения, попросить ученика привести соответствующие примеры или объяснить пример учителя. При необходимости к обсуждению можно привлечь всех учащихся класса.

IV. Задание на уроке дается из числа наиболее характерных типовых задач (~15 мин). Выполнение задания представляет собой:

1) самостоятельную работу учащихся всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.;

2) диалог соседей по парте: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка заданий;

3) работу у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможны как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. При этом происходит и диалог учителя с учеником, отвечающим у доски.

V. Задание на дом дается из числа задач, аналогичным рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 35–40 мин. Желательно, чтобы учащимися были рассмотрены различные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

При обучении (в том числе при выполнении домашнего задания) необходимо приучить школьников фиксировать непонятый материал: теоретические понятия, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это уже половина ответа на этот вопрос. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии.

VI. В разработках многих уроков предусмотрены творческие задания. Они отличаются от приводимых в учебнике или большей сложностью, или нестандартностью формулировки задания, или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от уровня подготовки класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) со всеми учащимися в классе или дома;

2) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками на уроке или дома;

3) на внеклассных занятиях (факультативы, дополнительные занятия, кружки);

4) во время проведения олимпиад, недель математики, математических боев и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах времени, отведенного на урок.

VII. Подведение итогов урока (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, обсуждений, дополнений и т. д. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Урок отработки и закрепления пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрены повторение и закрепление пройденного материала (~20 мин). Прежде всего, он включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давали сами учащиеся. Вопросы могут включать в себя непонятые термины, определения, алгоритмы и другой теоретический материал. Также может возникнуть и необходимость разбора нерешенных задач.

При этом желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более понятными и доступными для понимания ровесниками.

Ориентировочное время ~5–10 мин.

Далее предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос, самостоятельная работа или тест), на который отводится ~10–15 мин.

Задание для письменного опроса содержит 1–2 теоретических вопроса и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на его понимание, а не на строгость и четкость формулировок.

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые, необходимые для дальнейшего изучения алгебры задачи.

Тест содержит 3–4 задачи, для каждой из которых приводится несколько вариантов ответа. Однако тестов дано мало. Это связано с тем, что учащиеся 10 класса часто ошибаются, а тестирование не дает возможности выявить причину ошибки (непонимание темы, невнимательность, арифметические ошибки, пробелы в знании предыдущего материала и т. д.).

По каждой изучаемой теме проводится **контрольная работа.** Она составлена **в шести вариантах** различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее, варианты 5, 6 самые сложные). Каждый вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, они подобны задачам, решенным в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оценивать контрольную работу можно следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность этих заданий).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы). При необходимости за счет уменьшения количества задач работу можно выполнить и на одном уроке.

После каждой контрольной работы проводят анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задачи вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что из-за дифференциации вариантов и заданий возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

Чтобы устранить подобную необъективность, повысить оценку, еще раз повторить и закрепить пройденную тему, помимо контрольной работы, проводится **тематический зачет**. Зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы (группа А – самые простые задачи, группа В – более сложные задачи и группа С – самые сложные задачи). Каждая задача из группы А оценивается в 1 балл, из группы В – в 2 балла, из группы С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач группы А можно получить 7 баллов, группы В – 8 баллов и группы С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может быть догмой. Каждый урок должен способствовать обучению школьников. Пусть школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии по-

нять, чем не воспримет ничего. Ведь непонимание и незнание принимают хронический характер, а это может привести к полному провалу в изучении алгебры и начал математического анализа.

В заключение отметим, что цель изучения алгебры и математического анализа в 10 классе не только освоение изложенного материала и навыков решения задач, но и выработка правильного подхода к обучению, развитие мышления, пробуждение интереса к точным наукам.

Тематическое планирование учебного материала

(3 ч в неделю в 1-м полугодии,
2 ч в неделю во 2-м полугодии)

1-е ПОЛУГОДИЕ (48 ч)

Глава 1. Числовые функции (6 ч)

§ 1. Определение числовой функции и способы ее задания (2 ч)
§ 2. Свойства функций (2 ч)
§ 3. Обратная функция (1 ч)
Контрольная работа № 1 (1 ч)

Глава 2. Тригонометрические функции (22 ч)

§ 4. Числовая окружность (2 ч)
§ 5. Числовая окружность на координатной плоскости (2 ч)
§ 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс (2 ч)
§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента (2 ч)
§ 8. Тригонометрические функции углового аргумента (1 ч)
§ 9. Формулы приведения (2 ч)
§ 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график (2 ч)
§ 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график (2 ч)
§ 12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ (1 ч)
§ 13. Преобразования графиков тригонометрических функций (2 ч)
§ 14. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики (2 ч)
Контрольная работа № 2 (1 ч)

Глава 3. Тригонометрические уравнения (9 ч)

§ 15. Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$ (2 ч)
§ 16. Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$ (2 ч)
§ 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg} t = a$, $\operatorname{ctg} t = a$ (1 ч)
§ 18. Тригонометрические уравнения (3 ч)
Контрольная работа № 3 (1 ч)

Глава 4. Преобразование тригонометрических выражений (11 ч)

§ 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов (2 ч)
§ 20. Тангенс суммы и разности аргументов (1 ч)
§ 21. Формулы двойного аргумента (2 ч)
§ 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение (3 ч)
§ 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы (2 ч)

2-е ПОЛУГОДИЕ (34 ч)

Глава 4. Преобразование тригонометрических выражений (обобщение)

Контрольная работа № 4 (1 ч)

Глава 5. Производная (28 ч)

§ 24. Числовые последовательности и их свойства. Предел последовательности (1 ч)

§ 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии (1 ч)

§ 26. Предел функции (3 ч)

§ 27. Определение производной (3 ч)

§ 28. Вычисление производных (3 ч)

§ 29. Уравнение касательной к графику функции (2 ч)

§ 30. Примененне производиой для исследований функций на монотонность и экстремумы (3 ч)

§ 31. Построение графиков функций (3 ч)

§ 32. Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке (2 ч)

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин (3 ч)

Контрольная работа № 5 (1 ч)

Контрольная работа № 6 (2 ч)

Повторение (6 ч)

1-е полугодие

Глава 1
Числовые функции

Уроки 1–2. Определение числовой функции и способы ее задания

Цель: обсудить определение функции, способы ее задания.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение материала 9 класса

Различные аспекты этой темы уже рассматривались в 7–9 классах. Теперь необходимо расширить и обобщить сведения о функциях. Напомним, что тема является одной из *важнейших* для всего курса математики. Различные функции будут изучаться вплоть до окончания школы и далее в высших учебных заведениях. Данная тема вплотную связана с решением уравнений, неравенств, текстовыми задачами, прогрессиями и т. д.

Определение 1. Пусть даны два множества действительных чисел D и E и указан закон f, по которому *каждому числу* $x \in D$ ставится в соответствие единственное число $y \in E$ (см. рисунок). Тогда говорят, что задана *функция* $y = f(x)$ *или* $y(x)$ *с областью определения (О.О.)* D *и областью изменения (О.И.)* E. При этом величину x называют *независимой переменной* (или *аргументом* функции), величину y – *зависимой переменной* (или *значением* функции).

Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$ (область значений функции f), обозначают $E(f)$.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x-2} + 3$. Для нахождения y для каждого значения x необходимо выполнить следующие операции: из величины x вычесть число 2 ($x - 2$), извлечь квадратный корень из этого выражения ($\sqrt{x-2}$) и, наконец, прибавить число 3 ($\sqrt{x-2}+3$). *Совокупность этих операций* (или закон, по которому для каждого значения x ищется величина y) и *называется функцией* $y(x)$. Например, для $x = 6$ находим $y(6)=\sqrt{6-2}+3=\sqrt{4}+3=$ $=2+3=5$. Таким образом, для вычисления функции y в данной точке x *необходимо подставить эту величину x в данную функцию $y(x)$.*

Очевидно, что для данной функции *для любого* допустимого числа x можно найти только *одно* значение y (т. е. каждому значению x соответствует *одно* значение y).

Рассмотрим теперь область определения и область изменения этой функции. Извлечь квадратный корень из выражения ($x - 2$) можно, только если эта величина неотрицательная, т. е. $x - 2 \geq 0$ или $x \geq 2$. Находим $D(y) = [2; +\infty)$. Так как по определению арифметического корня $0 \leq \sqrt{x-2} < +\infty$, то прибавим ко всем частям этого неравенства число 3, получим: $3 \leq \sqrt{x-2}+3 < +\infty$ или $3 \leq y < +\infty$. Находим $E(y) = [3; +\infty)$.

В математике часто используются *рациональные функции*. При этом *функции вида* $f(x) = p(x)$ (где $p(x)$ – многочлен) называют *целыми рациональными функциями*. *Функции вида* $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены) называют *дробно-рациональными функциями*. Очевидно, дробь $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ определена, если знаменатель $q(x)$ не обращается в нуль. Поэтому область определения дробно-рациональной функции $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ – множество всех действительных чисел, из которого исключены корни многочлена $q(x)$.

Пример 2

Рациональная функция $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$ определена при $x - 2 \neq 0$, т. е. $x \neq 2$. Поэтому область определения данной функции – множество всех не равных 2 действительных чисел, т. е. объединение интервалов $(-\infty; 2)$ и $(2; \infty)$.

Напомним, что *объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается символом $A \cup B$. Так, объединением отрезков $[1; 5]$ и $(3; 9)$ является промежуток [1; 9). Объединение промежутков [1; 2) и [3; 4] (непересекающиеся промежутки) обозначают $[1; 2) \cup [3; 4]$.

Возвращаясь к примеру, можно записать: $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Так как при всех допустимых значениях x дробь $\dfrac{1}{x-2}$ не обращается в нуль, то функция $f(x)$ принимает все значения, кроме 3. Поэтому $E(f) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

Пример 3

Найдем область определения дробно-рациональной функции $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3x+4}{(x-1)(x+3)}$.

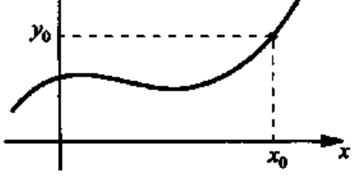
Знаменатели дробей обращаются в нуль при $x = 2$, $x = 1$ и $x = -3$. Поэтому область определения данной функции $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$.

Пример 4

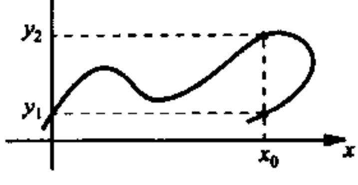
Зависимость $y(x) = \begin{cases} 2x-3, \\ x^2+1 \end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение y, например, для $x = 1$, то, пользуясь верхней формулой, найдем: $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим: $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению x ($x = 1$) соответствуют два значения y ($y = -1$ и $y = 2$). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

Пример 5

Приведены графики двух зависимостей $y(x)$. Определим, какая из них является функцией.



а



б

На рис. *а* приведен график функции, так как любой точке x_0 соответствует только одно значение y_0. На рис. *б* приведен график какой-то зависимости (но не функции), так как существуют такие точки (например, x_0), которым отвечает более одного значения y (например, y_1 и y_2).

Рассмотрим теперь *основные способы задания* функций.

1) ***Аналитический*** (с помощью формулы или формул).

Пример 6

Рассмотрим функции: а) $y = x^2 + 3\sqrt{x}$; б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задает функцию. Для любого значения x легко найти величину y. Например, для $x = -0{,}37$ (так как $x < 0$, то пользуясь верхним выражением), получаем: $y(-0{,}37) = -0{,}37$. Для $x = \frac{2}{3}$ (так как $x > 0$, то пользуемся нижним выражением) имеем: $y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Из способа нахождения y понятно, что любой величине x отвечает только одно значение y.

в) $3x + y = 2y - x^2$. Выразим из этого соотношения величину y: $3x + x^2 = 2y - y$ или $x^2 + 3x = y$. Таким образом, это соотношение также задает функцию $y = x^2 + 3x$.

2) ***Табличный***

Пример 7

Выпишем таблицу квадратов y для чисел x.

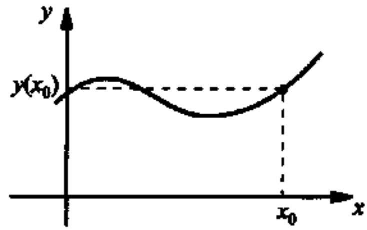
x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Данные таблицы также задают функцию – для каждого (приведенного в таблице) значения x можно найти единственное значение y. Например, $y(1{,}5) = 2{,}25$, $y(5) = 25$ и т. д.

3) ***Графический***

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться *специальным рисунком – графиком* функции.

Определение 2. *Графиком функции* $y(x)$ называют *множество* всех *точек* системы координат, *абсциссы* которых равны значениям *независимой переменной* x, а *ординаты* – соответствующим значениям *зависимой переменной* y.



В силу такого определения все пары точек (x_0, y_0), которые *удовлетворяют* функциональной зависимости $y(x)$, *расположены* на графике функции. Любые другие пары точек, *не удовлетворяющие* зависимости $y(x)$, на графике функции *не лежат*.

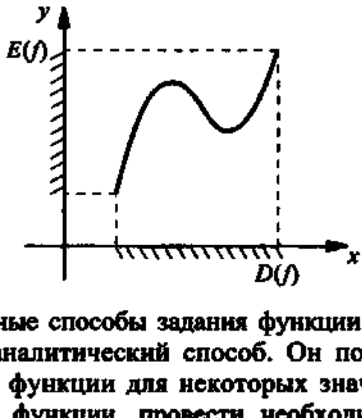
Пример 8

Дана функция $y = 2x - 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) (−2; −6); б) (−3; −10)?

1. Найдем значение функции y при $x = -2$: $y(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot |-2| + 4 = -4 - 3 \cdot 2 + 4 = -6$. Так как $y(-2) = -6$, то точка A (−2; −6) *принадлежит* графику данной функции.

2. Определим значение функции y при $x = -3$: $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot |-3| + 4 = -6 - 3 \cdot 3 + 4 = -11$. Так как $y(-3) = -11$, то точка B (−3; −10) *не принадлежит* графику этой функции.

По данному графику функции $y = f(x)$ легко найти область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ функции. Для этого точки графика проецируют на оси координат. Тогда абсциссы этих точек образуют область определения $D(f)$, ординаты – область значений $E(f)$.



Сравним различные способы задания функции. *Наиболее полным* следует считать аналитический способ. Он позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем *табличный* способ позволяет *быстро* *и легко найти значение функции* для некоторых значений аргумента. *График* функции *наглядно показывает ее поведение.* Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. На практике используются все три способа задания функции.

Будем считать основным аналитический способ задания функции и рассмотрим еще несколько задач.

Пример 9

Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Найдем: а) $y(2)$; б) $y(-3x)$; в) $y(x + 1)$.

Для того чтобы найти значение функции при каком-то значении аргумента, необходимо подставить это значение аргумента в аналитический вид функции. Поэтому получим:

а) $y(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$;

б) $y(-3x) = 2 \cdot (-3x)^2 - 3 \cdot (-3x) + 1 = 18x^2 + 9x + 1$;

в) $y(x + 1) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 3\,(x + 1) + 1 = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 + 1 = 2x^2 + x$.

Пример 10

Известно, что $y(3 - x) = 2x^2 - 4$. Найдем: а) $y(x)$; б) $y(-2)$.

а) Обозначим буквой $z = 3 - x$, тогда $x = 3 - z$. Подставим это значение x в аналитический вид данной функции $y(3 - x) = 2x^2 - 4$ и получим: $y(3-(3-z)) = 2\cdot(3-z)^2 - 4$, или $y(z) = 2\cdot(3-z)^2 - 4$, или $y(z) = 2\cdot(9 - 6z + z^2) - 4$, или $y(z) = 2x^2 - 12z + 14$. Так как безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции – z, x, t или любой другой, то сразу получим: $y(x) = 2x^2 - 12x + 14$;

б) Теперь легко найти $y(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 14 = 8 + 24 + 14 = 46$.

Пример 11

Известно, что $2y(x-2) + 3y(2-x) = x^2 + 2x + \dfrac{1}{x+1}$. Найдем $x(y)$.

Обозначим буквой $z = x - 2$, тогда $x = z + 2$, и запишем условие задачи: $2y(z) + 3y(-z) = (z+2)^2 + 2(z+2) + \dfrac{1}{z+3}$ или $2y(x) + 3y(-z) = z^2 + 6z + 8 + \dfrac{1}{z+3}$. То же условие запишем для аргумента $(-z)$: $2y(-z) + 3y(z) = z^2 - 6z + 8 + \dfrac{1}{-z+3}$. Для удобства введем новые переменные $a = y(z)$ и $b = y(-z)$. Для таких переменных получим систему линейных уравнений $\begin{cases} 2a+3b = z^2+6+8+\dfrac{1}{z+3}, \\ 3a+2b = z^2-6z+8-\dfrac{1}{z-3}. \end{cases}$ Нас интересует неизвестная a.

Для ее нахождения используем способ алгебраического сложения. Поэтому умножим первое уравнение на число (–2), второе уравнение – на число 3. Получим: $\begin{cases} -4a-6b = -2z^2-12z-16-\dfrac{2}{z+3}, \\ 9a+6b = 3z^2-18z+24-\dfrac{3}{z-3}. \end{cases}$ Сложим эти уравнения: $5a = z^2-30z+8-\dfrac{2}{z+3}-\dfrac{3}{z-3}$, откуда $a = \dfrac{1}{5}z^2 - 6z + \dfrac{8}{5} - \dfrac{2}{5(z+3)} - \dfrac{3}{5(z-3)} = y(z)$. Так как аргумент функции можно обозначать любой буквой, то имеем: $y(x) = \dfrac{1}{5}x^2 - 6x + \dfrac{8}{5} - \dfrac{2}{5(x+3)} - \dfrac{3}{5(x-3)}$.

В заключение заметим, что к концу 9 класса были изучены *свойства и графики*:

а) линейной функции $y = kx + m$ (график – прямая линия);

б) квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (график – парабола);

в) дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (график – гипербола), в частности функции $y = \dfrac{k}{x}$;

г) степенной функции $y = x^\alpha$ (в частности, функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$);

д) функции $y = |x|$.

Для дальнейшего изучения материала рекомендуем повторить свойства и графики указанных функций. На следующих занятиях будут рассмотрены основные способы преобразования графиков.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение числовой функции.

2. Расскажите о способах задания функции.

3. Что называется объединением множеств A и B?

4. Какие функции называются целыми рациональными?

5. Какие функции называются дробно-рациональными? Как находится область определения таких функций?

6. Что называют графиком функции $f(x)$?

7. Приведите свойства и графики основных функций.

IV. Задание на уроках

§ 1, № 1 (а, г); 2 (в, г); 3 (а, б); 4 (в, г); 5 (а, б); 6 (в); 7 (а, б); 8 (в, г); 10 (а); 13 (в, г); 16 (а, б); 18.

V. Задание на дом

§ 1, № 1 (б, в); 2 (а, б); 3 (в, г); 4 (а, б); 5 (в, г); 6 (г); 7 (в, г); 8 (а, б); 10 (б); 13 (а, б); 16 (в, г); 19.

VI. Творческие задания

1. Найдите функцию $y = f(x)$, если:

а) $f(x-2) = 3x + 5$;

б) $f(3-2x) = 4x - 1$;

в) $f(2x+1) = x^2 - 3x$;

г) $f(1-3x) = 6x^2 + 2x$;

д) $f(1-4x) = |x-2|$;

е) $f(3-2x) = |4-x|$;

ж) $f(2-x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$;

з) $f(1-2x) = \dfrac{2x+3}{3-x}$;

и) $f(x+3) = 2\sqrt{4-x}$;

к) $f(2-x) = 3\sqrt{x+5}$.

Ответы: а) $f(x) = 3x + 11$; б) $f(x) = 5 - 2x$; в) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$; г) $f(x) = 2x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{8}{3}$; д) $f(x) = \frac{1}{4}|x-9|$; е) $f(x) = \frac{1}{2}|x+5|$; ж) $f(x) = \frac{3x-7}{2x-1}$; з) $f(x) = \frac{2(4-x)}{x+5}$; и) $f(x) = 2\sqrt{7-x}$; к) $f(x) = 3\sqrt{7-x}$.

2. Найдите функцию $y = f(x)$, если:

а) $3f(x) - 2f(-x) = 3x^2 - 5x$;

б) $2f(x-3) + 5f(3-x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$;

в) $4f(2x-1) - 3f(1-2x) = 4x^2 - 2x + 3$;

г) $3f(3x-2) + 2f(2-3x) = \dfrac{5x+2}{2x+5}$;

д) $3f(x) - 4f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x^2 + 3x$;

е) $2f(x-3)+5f\left(\frac{1}{x-3}\right)=\frac{2x-1}{x+2}$.

Ответы: а) $f(x)=3x^2-x$; б) $f(x)=\frac{5}{21}\cdot\frac{2x-7}{x-8}-\frac{2}{21}\cdot\frac{2x+7}{x+8}$; в) $f(x)=x^2+\frac{1}{7}x+3$; г) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5x+16}{2x+17}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5x-16}{2x-17}$; д) $f(x)=-\frac{6}{7}x^2-\frac{9}{7}x-\frac{8}{7x^2}-\frac{12}{7x}$; е) $f(x)=\frac{5}{21}\cdot\frac{5x+2}{5x+1}-\frac{2}{21}\cdot\frac{2x+5}{x+5}$.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 3–4. Преобразование графиков (факультативное занятие)

Цель: освоить основные способы преобразования графиков.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\frac{7}{x+2}-\frac{6x+5}{x^2-6x+8}$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5-x}$.

2. Начертите график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой $D(f)=[-3; 4]$; $E(f)=[-2; 3]$; $f(0)=2$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

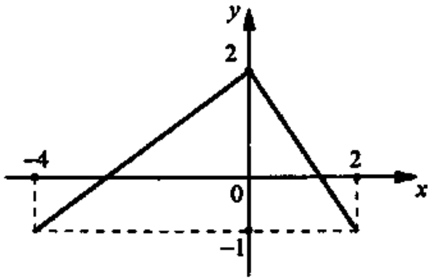
а) $f(x)=\frac{3}{x+4}-\frac{5x-1}{x^2-4x+3}$;

б) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x+2}$.

2. Начертите график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой $D(f)=[-2; 5]$; $E(f)=[-3; 4]$; $f(0)=3$.

III. Изучение нового материала

Способы преобразования графиков позволяют *строить графики достаточно сложных функций*, используя базовые графики линейной, квадратичной, дробно-линейной, степенной и других функций. Такие способы преобразования *являются универсальными* и пригодны *для любых функций*. Для простоты построения будем рассматривать кусочно-линейную функцию $f(x)$ с областью определения $D(f)$, график которой представлен на рисунке.



Будем обозначать через $(x'; y')$ координаты точки, в которую переходит произвольная точка $(x; y)$ плоскости при данном преобразовании. Рассмотрим эти преобразования.

1) ***Параллельный перенос вдоль оси ординат на вектор*** **(0; *b*)**

При данном преобразовании получаем: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + b, \end{cases}$ и произвольная точка графика $(x; f(x))$ переходит в точку $(x; f(x) + b)$. Это означает, что график функции $f(x)$ переходит в фигуру, состоящую из всех точек $(x; f(x) + b)$, где $x \in D(f)$. По определению такая фигура является графиком функции $y = f(x) + b$. В соответствии с изложенным сформулируем *правило*:

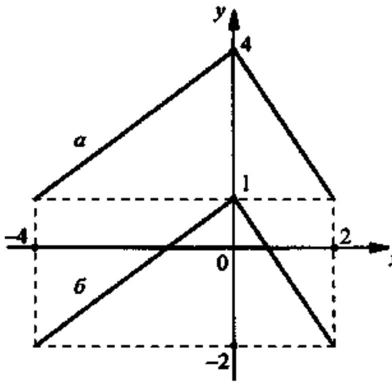
для построения графика функции $y = f(x) + b$ (где b – постоянное число) надо перенести график функции $y = f(x)$ на вектор $(0; b)$ вдоль оси ординат.

Пример 1

Для представленной функции $y = f(x)$ построим график функции: а) $y = f(x) + 2$; б) $y = f(x) - 1$.

а) В соответствии с правилом переносим график функции $y = f(x)$ на вектор (0; 2), т. е. на 2 единицы вверх вдоль оси ординат;

б) в соответствии с правилом переносим график функции $y = f(x)$ на вектор (0; –1), т. е. на 1 единицу вниз вдоль оси ординат.



2) ***Растяжение вдоль оси ординат с коэффициентом m***

Такое преобразование задается формулами $\begin{cases} x' = x, \\ y' = my, \end{cases}$ и произвольная точка графика $(x; f(x))$ переходит в точку $(x; mf(x))$. Это означает, что график функции $f(x)$ переходит в фигуру, состоящую из всех точек $(x; mf(x))$, где $x \in D(f)$. Такая фигура является графиком функции $y = mf(x)$. Итак, имеет место следующее *правило*:

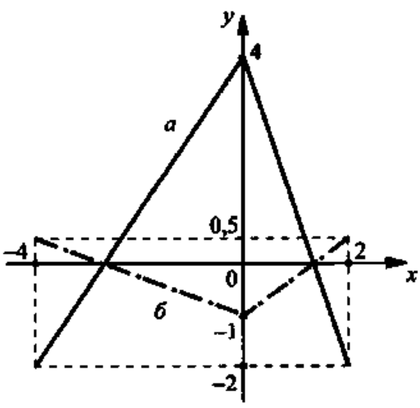
для построения графика функции $y = mf(x)$ надо растянуть график функции $y = f(x)$ в m раз вдоль оси ординат.

Пример 2

Построим график функции: а) $y = 2f(x)$; б) $y = -0{,}5f(x)$.

а) В соответствии с правилом растягиваем график функции $y = f(x)$ в 2 раза вдоль оси ординат;

б) в соответствии с правилом растягиваем график функции $y = f(x)$ в $-0{,}5$ раза вдоль оси ординат.



Отметим, что если $0 < |k| < 1$, то растяжение с коэффициентом k фактически является *сжатием*. Поэтому растяжение с коэффициентом 0,5 является сжатием в 2 раза. При $k < 0$ для построения графика функции $y = kf(x)$ надо сначала растянуть график функции $y = f(x)$ в $|k|$ раз, а затем отразить его симметрично относительно оси абсцисс.

3) ***Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор*** **$(-a; 0)$**

Это преобразование описывается формулами $\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y. \end{cases}$ Каждая точка графика функции $f(x)$ переходит в точку $(x - a; f(x))$. Поэтому с помощью переменных x' и y' можно записать, что график f переходит в фигуру Φ, состоящую из точек $(x'; f(x' + a))$, где x' принимает все значения $x + a$. Именно при этих значениях x' число $x' - a$ принадлежит $D(f)$ и $f(x' + a)$ определено. Поэтому фигура Φ есть график функции $(x; f(x + a))$. Итак, запомните *правило*:

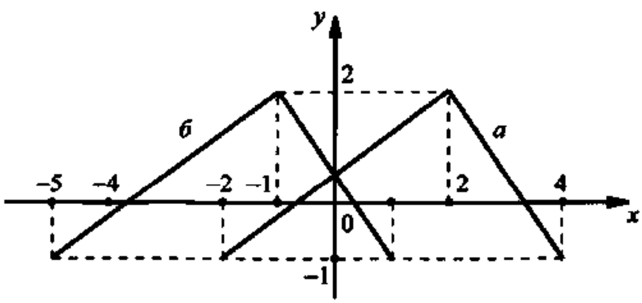
график функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $f(x)$ переносом вдоль оси абсцисс на вектор $(-a; 0)$. При $a < 0$ вектор $(-a; 0)$ направлен в положительном направлении оси абсцисс, при $a > 0$ – в отрицательном.

Пример 3

Построим график функции: а) $y = f(x - 2)$; б) $y = f(x + 1)$.

а) Переносим график функции вдоль оси абсцисс на вектор $(2; 0)$, т. е. смещаем его на 2 единицы вправо;

б) переносим график функции вдоль оси абсцисс на вектор $(-1; 0)$, т. е. смещаем его на 1 единицу влево.



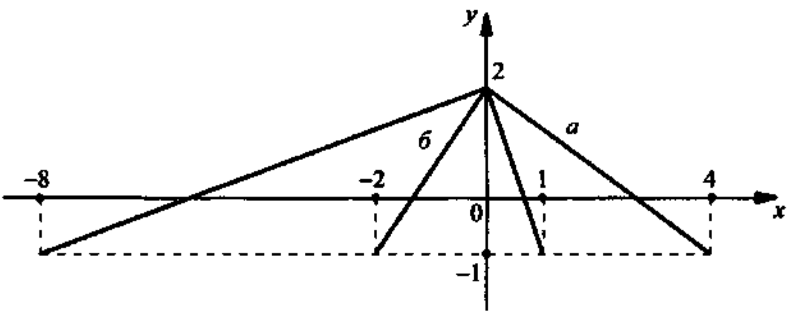
4) ***Растяжение вдоль оси абсцисс с коэффициентом k***

Такое преобразование задается формулами $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{k}x, \\ y' = y. \end{cases}$ Произвольная точка графика функции $f(x)$ при этом переходит в точку $(\frac{1}{k}x;\ f(x))$. Для переменной x', y' можно утверждать, что график функции $y = f(x)$ переходит в фигуру, состоящую из точек $(x'; f(kx))$, где x' принимает все значения $\frac{1}{k}x$, а $x \in D(f)$. Эта фигура есть график функции $y = f(kx)$. Таким образом, существует *правило*:

для построения графика функции $y = f(kx)$ надо сжать график функции $f(x)$ с коэффициентом k вдоль оси абсцисс.

Пример 4

Построим график функции: а) $y = f(0{,}5x)$; б) $y = f(2x)$.



а) Запишем функцию в виде $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$. В соответствии с правилом для построения графика этой функции надо график функции $y = f(x)$ растянуть в 2 раза вдоль оси абсцисс;

б) запишем функцию в виде $y = f(2x)$. График этой функции получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в 0,5 раза. Так как $k = 2$ и $|k| > 1$, то фактически это означает сжатие графика $y = f(x)$ в $k = 2$ раза вдоль оси абсцисс.

Рассмотрим *частные случаи* преобразований 2 и 4, *наиболее распространенные* на практике.

5) ***Отражение относительно оси абсцисс***

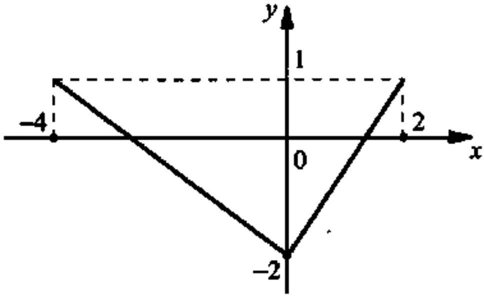
Это преобразование является частным случаем преобразования 2 для $m = -1$ и описывается формулами $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$ Тогда имеет место *правило*:

для построения графика функции $y = -f(x)$ надо график функции $y = f(x)$ отразить относительно оси абсцисс.

Пример 5

Построим график функции $y = -f(x)$.

В соответствии с правилом отражаем симметрично относительно оси абсцисс график функции $y = f(x)$ и получаем график функции $y = -f(x)$.



6) ***Отражение относительно оси ординат***

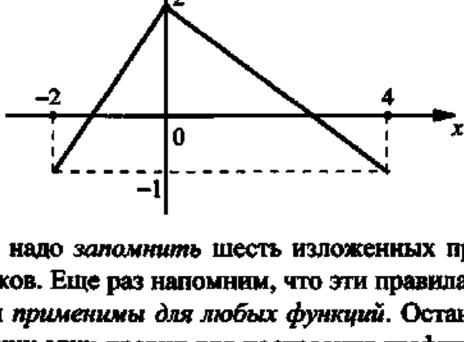
Такое преобразование является частным случаем преобразования 4 для $k = -1$ и задается формулами $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$ Существует *правило*:

для построения графика функции $y = f(-x)$ надо график функции $y = f(x)$ симметрично отразить относительно оси ординат.

Пример 6

Построим график функции $y = f(-x)$.

Отразим график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси ординат и получим график функции $y = f(-x)$.

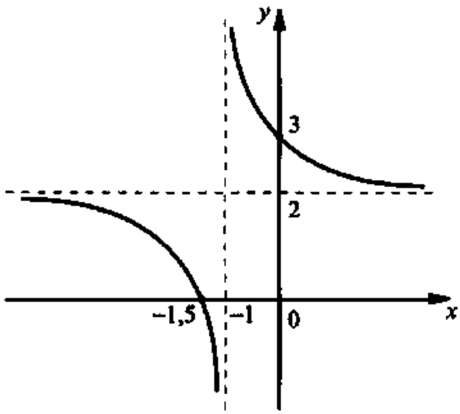


Обязательно надо *запомнить* шесть изложенных правил преобразования графиков. Еще раз напомним, что эти правила являются *универсальными* и *применимы для любых функций*. Остановимся теперь на использовании этих правил для построения графиков конкретных функций.

Пример 7

Построим график дробно-линейной функции $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

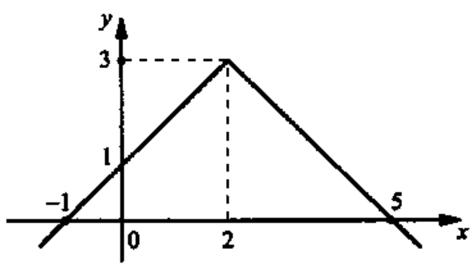
В функции $y(x)$ выделим целую часть $y=\dfrac{(2x+2)+1}{x+1}=$ $=\dfrac{2(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$. Из этой записи видно, что для построения графика функции $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ надо график функции $y=\dfrac{1}{x}$ сместить на 1 единицу влево вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вверх вдоль оси ординат.



Пример 8

Построим график функции $y = 3 - |x - 2|$.

Запишем функцию в виде $y = -|x - 2| + 3$. Из такой записи следует, что для построения графика функции $y = 3 - |x - 2|$ надо график функции $y = |x|$ отразить относительно оси абсцисс, затем этот новый график сместить на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единицы вверх вдоль оси ординат.



IV. Контрольный вопрос

Объясните, как с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции: а) $y = x^2 - 3$; б) $y = (x + 1)^2$; в) $y = -x^2$; г) $y = (-x)^2$; д) $y = 2x^2$; е) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

V. Задание на уроках

§ 1, № 9 (а, г); 11 (а, б); 14 (а, в).

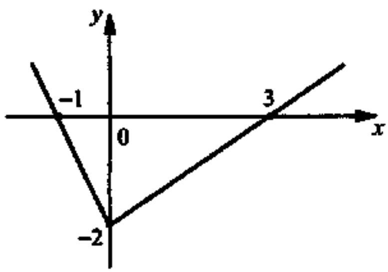
VI. Задание на дом

§ 1, № 9 (б, в); 11 (в, г); 14 (б, г).

VII. Творческое задание

Используя приведенный график функции $y = f(x)$, постройте график функции:

а) $y = f(x) + 3$; б) $y = f(x) - 1$; в) $y = 2f(x)$; г) $y = 0{,}5f(x)$; д) $y = f(x + 1)$; е) $y = f(x - 2)$; ж) $y = -f(x)$; з) $y = f(-x)$; и) $y = -2f(x)$; к) $y = f(-0{,}5x)$; л) $y = f(-x) + 2$; м) $y = f(-x + 2)$; н) $y = 3f(-x) + 2$.



VIII. Подведение итогов уроков

Урок 5. Преобразования графиков с модулями (факультативное занятие)

Цель: освоить основные навыки преобразования графиков с модулями.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(-x) + 2$?

2. Постройте график функции:

а) $y = (x+2)^2 - 1$;

б) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Вариант 2

1. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = -f(x) - 1$?

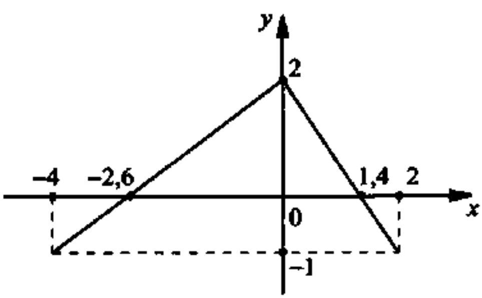
2. Постройте график функции:

а) $y = (x-1)^2 + 2$;

б) $y = \dfrac{x+2}{x-1}$.

III. Изучение нового материала

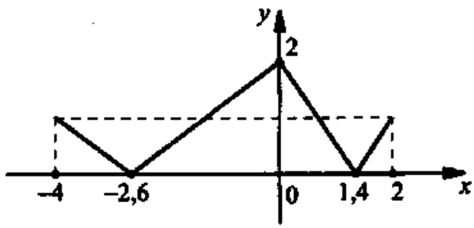
Из материала предыдущего урока видно, что способы преобразования графиков чрезвычайно полезны при их построении. Поэтому рассмотрим также основные *способы преобразования графиков, содержащих модули*. Эти способы являются *универсальными* и пригодны *для любых функций*. Для простоты построения будем рассматривать кусочно-линейную функцию $f(x)$ с областью определения $D(f)$, график которой представлен на рисунке. Рассмотрим *три стандартных преобразования графиков с модулями*.



1) ***Построение графика функции y = |f(x)|***

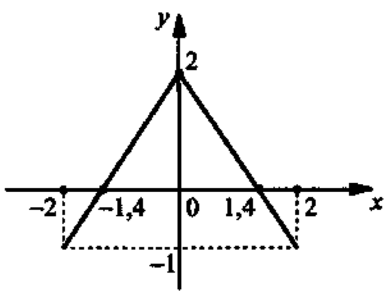
По определению модуля получим: $y = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$ Это означает, что *для построения графика* функции $y = |f(x)|$ *надо сохра-*

нить часть графика функции $y = f(x)$, *для которой* $y \geq 0$. Ту *часть графика* функции $y = f(x)$, *для которой* $y < 0$, *надо симметрично отразить вверх относительно оси абсцисс*.



2) ***Построение графика функции*** $y = f(|x|)$

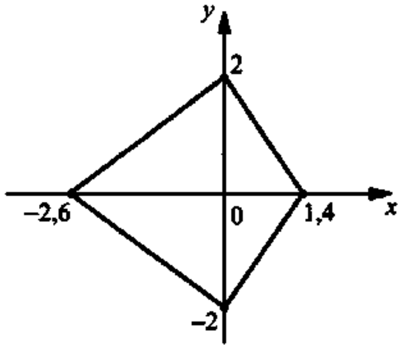
Раскроем модуль и получим: $y = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geq 0, \\ f(-x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$ Поэтому *для построения графика* функции $y = f(|x|)$ *надо сохранить часть графика* функции $y = f(x)$, *для которой* $x \geq 0$. Кроме того, *эту часть надо симметрично отразить влево относительно оси ординат*.



3) ***Построение графика уравнения*** $|y| = f(x)$

По определению модуля имеем, что при $f(x) \geq 0$ надо построить графики двух функций: $y = f(x)$ и $y = -f(x)$. Это означает, что *для построения графика* уравнения $|y| = f(x)$ *надо сохранить часть графика функции* $y = f(x)$, для которой $y \geq 0$. Кроме того, *эту часть надо симметрично отразить вниз относительно оси абсцисс*.

Заметим, что *зависимость* $|y| = f(x)$ *не задает функцию*, т. е. при $x \in (-2,6;\ 1,4)$ каждому значению x соответствуют два значения y. Поэтому на рисунке представлен именно *график уравнения* $|y| = f(x)$.

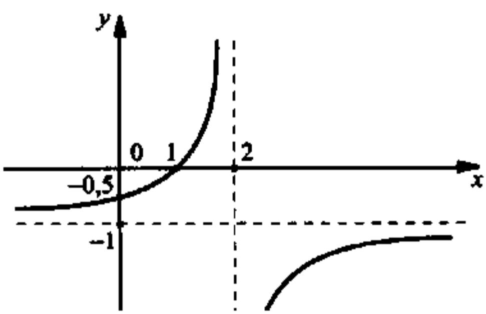


Используем рассмотренные способы преобразования графиков с модулями для построения графиков более сложных функций и уравнений.

Пример 1

Построим график функции $y = \frac{1-x}{x-2}$.

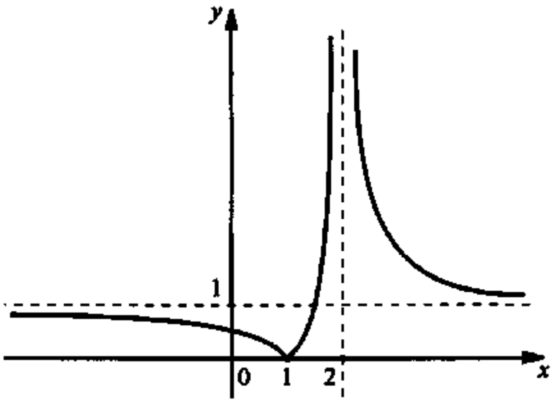
Выделим в этой функции целую часть $y = \frac{-(x-2)-1}{x-2} = -1 - \frac{1}{x-2}$. Такой график получается при смещении графика функции $y = -\frac{1}{x}$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вниз. Графиком данной функции является гипербола.



Пример 2

Построим график функции $y = \left|\dfrac{1-x}{x-2}\right|$.

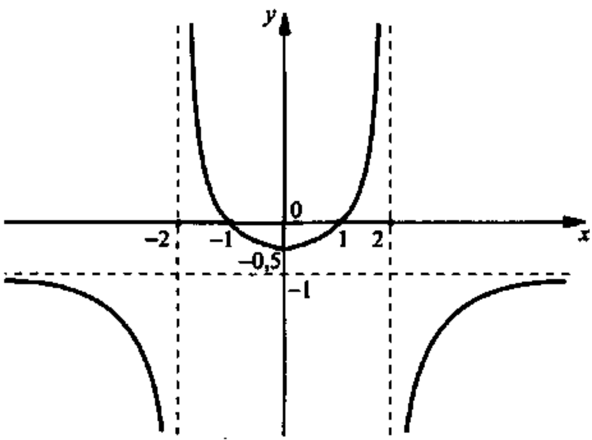
В соответствии со способом 1 сохраним часть графика из примера 1, для которой $y \geq 0$. Ту часть графика, для которой $y < 0$, симметрично отразим вверх относительно оси абсцисс.



Пример 3

Построим график функции $y = \dfrac{1-|x|}{|x|-2}$.

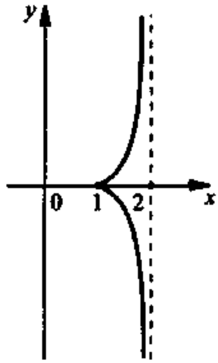
Используя способ 2, сохраним часть графика из примера 1, для которой $x \geq 0$. Эту сохраненную часть, кроме того, зеркально отразим влево относительно оси ординат. Получим график функции, симметричный относительно оси ординат.



Пример 4

Построим график уравнения $|y| = \dfrac{1-x}{x-2}$.

В соответствии со способом 3 сохраним часть графика из примера 1, для которой $y \geq 0$. Кроме того, эту сохраненную часть симметрично отразим вниз относительно оси абсцисс. Получим график данного уравнения.



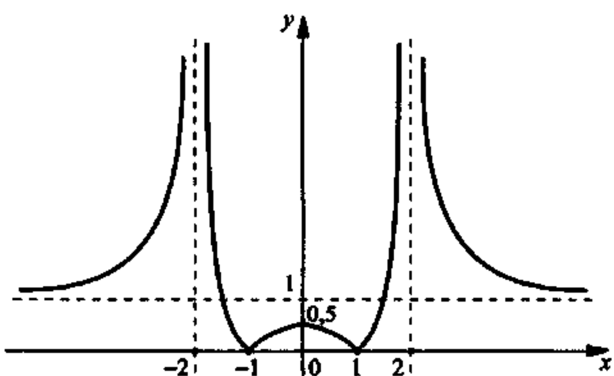
Разумеется, рассмотренные *способы* преобразования графиков можно *использовать* и *совместно.*

Пример 5

Построим график функции $y = \left|\dfrac{1-|x|}{|x|-2}\right|$.

Используем график функции $y = \dfrac{1-|x|}{|x|-2}$, построенный в примере 3.

Чтобы построить данный график, сохраним те части графика 3, для которых $y \geq 0$. Те части графика 3, для которых $y < 0$, симметрично отразим вверх относительно оси абсцисс.

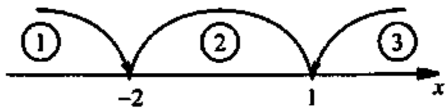


В тех случаях, когда *модули входят* в зависимость *иным образом* (чем в способах 1–3), необходимо эти *модули раскрыть*.

Пример 6

Построим график функции $y = |x - 1| - |x + 2|$.

Выражения $x - 1$ и $x + 2$, входящие под знаки модулей, меняют свои знаки в точках $x = 1$ и $x = -2$ соответственно. Отметим эти точки на координатной прямой. Они разбивают ее на три интервала. Используя определения модуля, раскроем модули в каждом промежутке.



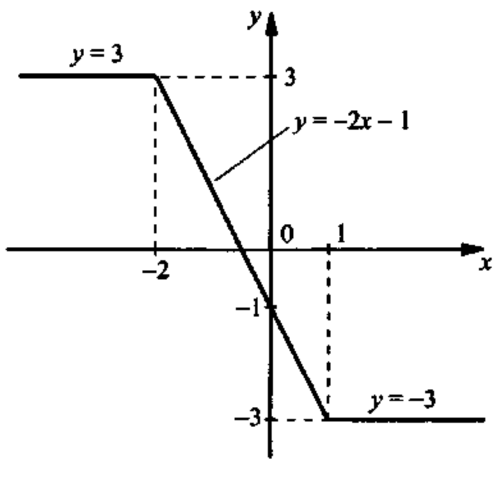
Получим:

1. При $x < -2$ $y = -(x-1) + (x+2) = 3$.

2. При $-2 \le x \le 1$ $y = -(x-1) - (x+2) = -2x - 1$.

3. При $x > 1$ $y = (x-1) - (x+2) = -3$.

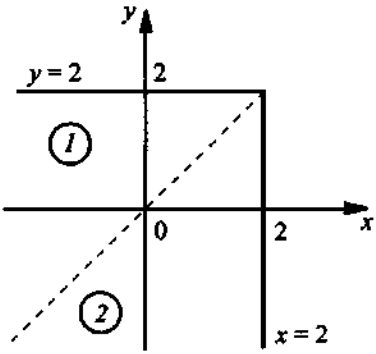
Построим графики этих функций, учитывая интервалы для переменной x, в которых раскрывались знаки модуля. Получим ломаную прямую.



Достаточно часто при построении графиков уравнений с модулями *для их раскрытия используют координатную плоскость*. Поясним это следующим примером.

Пример 7

Построим график уравнения $|y - x| + y + x = 4$.



Выражение $y - x$ меняет свой знак на прямой $y = x$. Построим эту прямую – биссектрису первого и третьего координатных углов. Эта прямая разбивает точки плоскости на две области: *1* – точки, расположенные над прямой $y = x$; *2* – точки, расположенные под этой прямой. Раскроем модуль в таких областях. В области *1* возьмем, например, контрольную точку (0; 5). Видим, что для этой точки выражение $y - x > 0$. Раскрывая модуль, получим: $y - x + y + x = 4$ или $y = 2$. Строим такую прямую в пределах первой области. Очевидно, в области *2* выражение $y - x < 0$. Раскрывая модуль, имеем: $-(y - x) + y + x = 4$ или $x = 2$. Строим эту прямую в пределах области 2. Получаем график данного уравнения.

IV. Контрольные вопросы

1. Как, используя график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = |f(x)|$?

2. С помощью графика функции $y = f(x)$ постройте график функции $y = f(|x|)$.

3. Как с помощью графика функции $y = f(x)$ построить график уравнения $|y| = f(x)$?

V. Задание на уроке

§ 1, № 12 (а, б); 15 (а, в).

VI. Задание на дом

§ 1, № 12 (в, г); 15 (б, г).

VII. Творческие задания

1. Постройте график линейной функции и уравнения:

а) $y = 2x - 3$; ж) $y = |2x - 3|$;

б) $y = 2|x| - 3$;
в) $y = |2|x| - 3|$;
г) $y = |x - 2| - |x + 3|$;
д) $|y + x| - 2x = 1$;
е) $|y - x + 1| = 2$;
з) $|y| = 2x - 3$;
и) $|y| = 2|x| - 3$;
к) $y = 2|x + 1| + |x - 3|$;
л) $|y - x| + 2x = 3$;
м) $|y + x - 2| = 1$.

2. Постройте график квадратичной функции и уравнения:

а) $y = x^2 + 2x - 3$;
б) $y = x^2 + 2|x| - 3$;
в) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$;
г) $x = y^2 - 2y - 3$;
д) $x = y^2 - 2|y| - 3$;
е) $y = |x^2 + 2x - 3|$;
ж) $|y| = x^2 + 2x - 3$;
з) $|y| = x^2 + 2|x| - 3$;
и) $|x| = y^2 - 2y - 3$.

3. Постройте график дробно-линейной функции и уравнения:

а) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$;
б) $y = \dfrac{|x|-2}{|x|-1}$;
в) $y = \dfrac{|x-2|}{x-1}$;
г) $y = \dfrac{|x|-2}{x-1}$;
д) $y = \left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|$;
е) $|y| = \dfrac{x-2}{x-1}$;
ж) $y = \dfrac{x-2}{|x-1|}$;
з) $y = \dfrac{x-2}{|x|-1}$.

4. Постройте график функции, уравнения, неравенства:

а) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$;
б) $|y - x - 2| \le 1$;
в) $y = |\sqrt{x+1} - 2|$;
г) $|y| = \sqrt{|x| - 3}$;
д) $|y| \le \sqrt{4 - |x|}$.
е) $y = 2x + \dfrac{x-3}{|x-3|}$;
ж) $|y + 2x - 1| > 3$;
з) $y = \sqrt{2 - |x|}$;
и) $|y| = \sqrt{|x| + 2}$;

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 6–8. Свойства функций (обобщающее занятие)

Цель: рассмотреть основные свойства функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Постройте график функции:

а) $y=\left|x^2-4x+3\right|$;

б) $y=\left|x-1\right|+\left|x+2\right|$.

2. Постройте график неравенства $\left|y-2x+1\right|\le 3$.

Вариант 2

1. Постройте график функции:

а) $y=\left|x^2-2x-3\right|$;

б) $y=\left|x+2\right|-\left|x-1\right|$.

2. Постройте график неравенства $\left|y+2x-1\right|\le 3$.

III. Изучение нового материала

Четко сформулируем *основные свойства* функций, на которые необходимо обращать внимание при исследовании функций и построении их графиков.

1. Точки пересечения графика функции с осями координат

Остановимся теперь на *основных свойствах функции*. С двумя свойствами функции вы уже знакомы – это *область определения* и *область изменения* функции. Рассмотрим *следующее свойство* функции – *точки пересечения* графика функции *с осями координат.*

Так как ось $0y$ характерна тем, что любая точка на ней имеет координату $x = 0$, а для оси $0x$ – любая точка на ней имеет координату $y = 0$, то точки пересечения графика с осями координат ищут очень просто. *Точка пересечения с осью* $0y$ равна *значению* функции $f(x)$ *при* $x = 0$, т. е. $f(0)$. *Точки пересечения с осью* $0x$ являются *корнями уравнения* $f(x) = 0$.

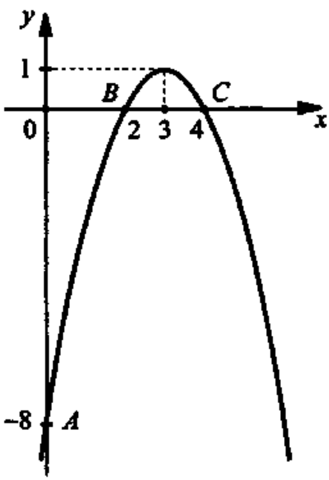
Пример 1

Рассмотрим функцию $y(x)=-x^2+6x-8$. Найдем точки пересечения графика этой функции с осями координат. Чтобы определить точку пересечения графика с осью ординат, вычислим значение функции $y(x)$ при $x = 0$: $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получим координаты этой точки $A(0; -8)$.

Теперь определим точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Для этого в функцию $y=-x^2+6x-8$ подставим значение $y = 0$ и получим квадратное уравнение $0=-x^2+6x-8$ или $0=x^2-6x+8$.

Решим его: $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\cdot1\cdot8}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\dfrac{6\pm2}{2}$, т. е. $x_1=2, x_2=4$.

Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках – $B(2; 0)$ и $C(4; 0)$. Для наглядности на рисунке приведен график данной функции.

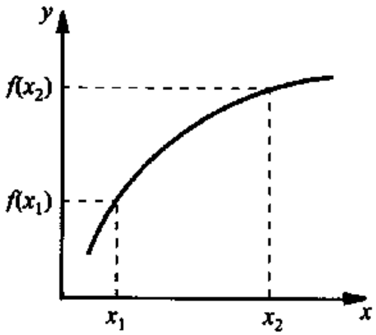


2. Монотонность функции

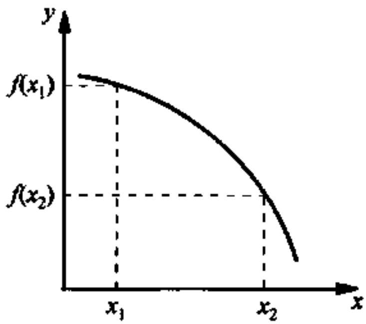
Рассмотрим еще одно свойство функции – монотонность (т. е. *возрастание* или *убывание* функции).

Определение 1. Функция называется *возрастающей*, если *большему значению аргумента* соответствует *большее значение функции* (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$).

Определение 2. Функция называется *убывающей*, если *большему значению аргумента* соответствует *меньшее значение функции* (т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$). На рисунках приведены графики монотонных (возрастающей и убывающей) и немонотонной функций.



Возрастающая функция, $f(x_2) > f(x_1)$



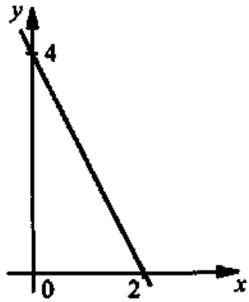
Убывающая функция, $f(x_2) < f(x_1)$

Немонотонная функция

Пример 2

Определим монотонность функции $f(x) = -2x + 4$.

Область определения этой функции – все значения x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$. Возьмем два значения x из области определения этой функции – x_1 и x_2, и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $f(x_1) = -2x_1 + 4$ и $f(x_2) = -2x_2 + 4$. Теперь необходимо сравнить эти значения и определить, какое из них больше. Для этого рассмотрим разницу этих величин $f(x_2) - f(x_1) = (-2x_2 + 4) - (-2x_1 + 4) =$
$= -2x_2 + 4 + 2x_1 - 4 = -2(x_2 - x_1)$.



Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1 > 0$ и величина $-2(x_2 - x_1) < 0$. Поэтому получим: $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$. Это неравенство означает, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому данная функция (по определению) является убывающей. Это же видно из приведенного графика функции.

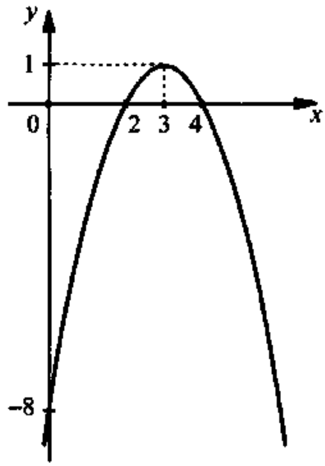
Функция *на всей области определения* может быть *немонотонной*, но *на отдельных промежутках* может быть *монотонной*. Например, функция $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ в целом *немонотонна*, но на промежутке $x \in [3; +\infty)$ функция *убывает*, а на промежутке $x \in (-\infty; 3]$ – *возрастает* (докажем это). Соответственно, такие промежутки называют *промежутками убывания* и *возрастания функции* $f(x)$.

Пример 3

Областью определения функции $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ является $D(f) = (-\infty; \infty)$. Возьмем два значения x из области определения: x_1 и x_2, и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $f(x_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 8$ и $f(x_2) = -x_2^2 + 6x_2 - 8$. Сравним эти значения. Рассмотрим разность этих величин: $f(x_2) - f(x_1) = -x_2^2 + x_1^2 + 6x_2 - 6x_1 = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 6(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(6 - x_2 - x_1)$. Первый множитель $x_2 - x_1$ в этом произведении положительный, так как $x_2 > x_1$ по договоренности. Второй же множитель может иметь разный знак. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $x_1 < x_2 \le 3$, тогда $x_1 + x_2 < 6$ и второй множитель $6 - x_1 - x_2 > 0$. Поэтому произведение положительно и $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$;

б) пусть $x_2 > x_1 \ge 3$, тогда $x_1 + x_2 > 6$ и второй множитель $6 - x_1 - x_2 < 0$. Поэтому произведение отрицательно и $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на промежутке $[3; \infty)$.



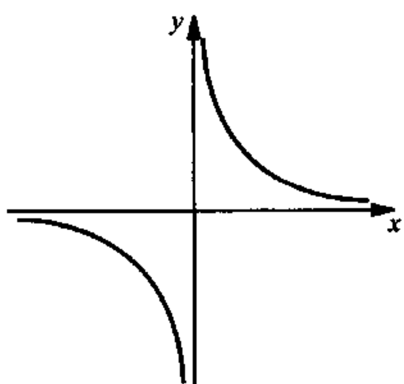
Из графика данной функции видны промежутки возрастания и убывания.

Если *область определения функции состоит из нескольких промежутков, то при исследовании функции на монотонность надо выбирать* точки x_1 *и* x_2, *лежащие в одном промежутке.*

Пример 4

Исследуем на монотонность функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Область определения данной функции – промежутки $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$. График этой функции (гипербола) хорошо известен.



Видно, что функция убывает в области определения. Исследуем ее на монотонность. Выберем точки x_1 и x_2 из области определения так, что $x_2 > x_1$. Найдем разность $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=$ $=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$. Так как $x_2 > x_1$, то числитель этой дроби отрицательный. Если x_1 и x_2 лежат в одном промежутке области определения (т. е. $x_1, x_2 < 0$ или $x_1, x_2 > 0$), то произведение $x_1 \cdot x_2 > 0$. Поэтому дробь отрицательна, т. е. $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$. В итоге получаем правильный результат – функция является убывающей.

Если x_1 и x_2 лежат в разных промежутках области определения (т. е. $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$), то произведение $x_1 \cdot x_2 < 0$. Поэтому дробь положительна, т. е. $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$. В результате получаем грубую ошибку – функция является возрастающей.

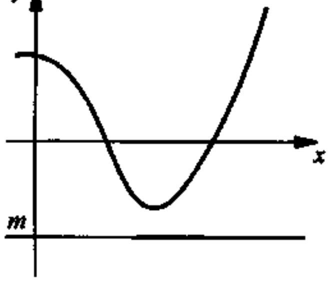
3. Ограниченность функций

Определение 3. Функцию $f(x)$ называют *ограниченной снизу*, если все значения этой функции больше некоторого числа m, т. е. $f(x) > m$. График функции целиком лежит *выше* прямой $y = m$.

Определение 4. Функцию $f(x)$ называют *ограниченной сверху*, если все значения этой функции меньше некоторого числа M, т. е. $f(x) < M$. График функции целиком лежит *ниже* прямой $y = M$.

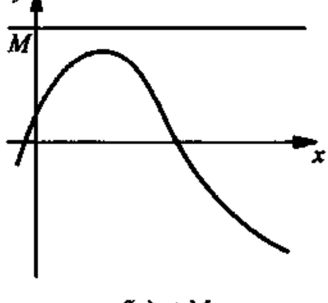
На рисунках приведены графики функций – ограниченной снизу (*а*), ограниченной сверху (*б*) и неограниченной (*в*). Если функция ограничена и снизу, и сверху на всей области определения, то ее называют *ограниченной*.

а



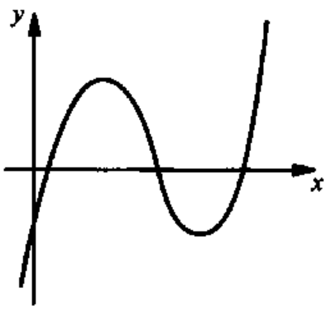
$f(x) > m$.
Ограничена снизу

б



$f(x) < M$.
Ограничена сверху

в



Не ограничена

Пример 5

Выясним ограниченность функции $y = -x^2 + 6x - 8$.

В данной функции выделим полный квадрат $y = -(x^2 - 6x + 8) = -((x-3)^2 - 1) = 1 - (x-3)^2$. Так как $(x - 3)^2 \geq 0$, то при всех значениях x значения $y(x) \leq 1$. В качестве числа M можно взять любое из чисел 2; $\sqrt{5}$; π и т. д. Тогда $y(x) < M$ и данная функция по определению ограничена сверху. Это же видно из рисунка примера 1.

Заметим, что более *перспективным* является другой способ решения. Предположим, что данная функция ограничена, т. е. при всех значениях x выполнено неравенство $m < y(x) < M$ или $m < -x^2 + 6x - 8 < M$. Найдем такие числа m и M.

Запишем данное двойное неравенство в виде системы квадратных неравенств $\begin{cases} m < -x^2 + 6x - 8, \\ -x^2 + 6x - 8 < M \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 + m < 0, \\ 0 < x^2 - 6x + 8 + M. \end{cases}$ Рассмотрим две вспомогательные функции: $y_1 = x^2 - 6x + 8 + m$ и $y_2 = x^2 - 6x + 8 + M$. Их графиками являются параболы, направленные ветвями вверх. Очевидно, что неравенство $y_1 < 0$ при всех x выполняться не может. Неравенство $y_2 > 0$ будет выполняться при всех значениях x, если дискриминант квадратного трехчлена $\frac{D}{4} = 9 - 8 - M = 1 - M < 0$, откуда $M > 1$. Таким образом, данная функция ограничена сверху и не ограничена снизу.

Рассмотрим более сложный пример на использование такого способа решения.

Пример 6

Выясним ограниченность функции $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Предположим, что данная функция ограничена, т. е. существуют такие числа m и M, что выполнено неравенство $m < y(x) < M$ и $m<\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}<M$ при всех значениях x.

Так как при всех значениях x выражение $x^2 + x + 1 > 0$, то умножим все части двойного неравенства на это выражение: $m(x^2+x+1)<x^2-x+1<M(x^2+x+1)$. Запишем такое неравенство в виде системы неравенств $\begin{cases} m(x^2+x+1)<x^2-x+1, \\ x^2-x+1<M(x^2+x+1) \end{cases}$ или $\begin{cases} 0<(1-m)x^2-(1+m)x+(1-m), \\ 0<(M-1)x^2+(M+1)x+(M-1). \end{cases}$

Рассмотрим две вспомогательные функции: $y_1=(1-m)x^2-(1+m)x+(1-m)$ и $y_2=(M-1)x^2+(M+1)x+(M-1)$. Чтобы выполнялись неравенства $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$ при всех x, надо, чтобы выполнялись условия:

1) парабола направлена ветвями вверх, т. е. старший коэффициент квадратного трехчлена положительный;

2) дискриминант квадратного трехчлена отрицательный.

Получим систему неравенств $\begin{cases} 1-m>0, \\ (1+m)^2-4(1-m)^2<0, \end{cases}$ или $\begin{cases} m<1, \\ (1+m+2-2m)(1+m-2+2m)<0, \end{cases}$ или $\begin{cases} m<1, \\ (m-3)(3m-1)>0, \end{cases}$ откуда $m<\dfrac{1}{3}$. Поэтому данная функция ограничена *снизу*. В качестве m можно взять, например, число $\dfrac{1}{10}$.

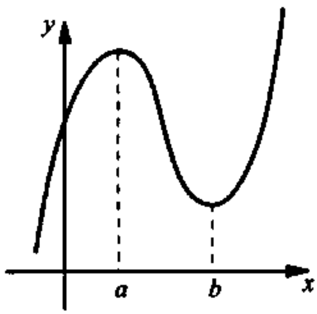
Аналогично получим еще одну систему неравенств $\begin{cases} M-1>0, \\ (M+1)^2-4(M-1)^2<0, \end{cases}$ или $\begin{cases} M>1, \\ (M+1+2M-2)(M+1-2M+2)<0, \end{cases}$ или $\begin{cases} M>1, \\ (3M-1)(M-3)>0, \end{cases}$ откуда $M > 3$. Таким образом, данная функция ограничена и *сверху*. В качестве M можно взять, например, число $\pi \approx 3{,}14$.

Следовательно, функция $y(x)$ ограничена и снизу, и сверху, т. е. ограничена.

4. Экстремумы функции

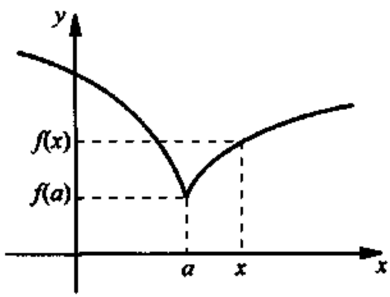
При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки $x = a$ удобно пользоваться понятием окрестности этой точки. *Окрестностью точки a* называют любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервалы (3; 10), (4; 6), (4,8; 5,1) – некоторые окрестности точки $a = 5$.

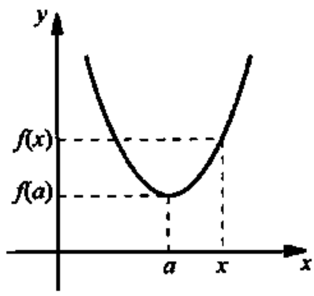
Характерным свойством функции $f(x)$ являются *точки экстремума* – точки, в которых *меняется монотонность функции*. При этом если *возрастание* функции *сменяется* ее *убыванием*, то такая точка a – *точка максимума*. Если, наоборот, *убывание* функции *сменяется* ее *возрастанием*, то такая точка b – *точка минимума*. Дадим более точное определение точек экстремума.



Определение 5. Точку $x = a$ называют *точкой минимума* функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $f(x) \geq f(a)$. При этом значение $f(a)$ называют *минимумом функции* $f(x)$.

В простейших случаях легко найти точку минимума и минимум функции.



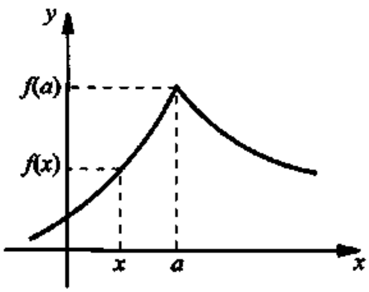


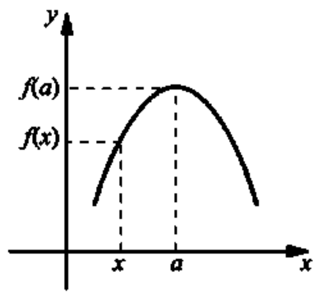
Пример 7

а) Для функции $y = x^3 + 6x + 10$ выделим полный квадрат суммы: $y = x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1 = 1 + (x+3)^2$. Так как при всех значениях x величина $(x+3)^2 \geq 0$, то данная функция имеет минимум $y_{min} = 1$ при условии $x + 3 = 0$, т. е. в точке минимума $x_{min} = -3$.

б) Для функции $y = 3|x-2| - 4$ величина $|x-2| \geq 0$. Поэтому данная функция имеет минимум $y_{min} = -4$ при условии $x - 2 = 0$, т. е. в точке минимума $x_{min} = 2$.

Определение 6. Точку $x = a$ называют *точкой максимума* функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки a выполнено неравенство $f(x) \leq f(a)$. При этом значение $f(a)$ называют *максимумом функции* $f(x)$.



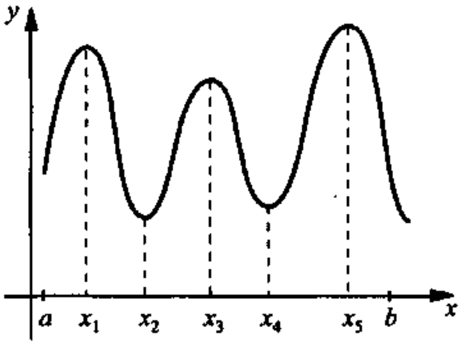


Пример 8

а) Для функции $y = 5 - 2|x+4|$ величина $|x+4| \geq 0$ при всех значениях x. Поэтому данная функция имеет максимум $y_{max} = 5$ при условии $x + 4 = 0$, т. е. в точке максимума $x_{max} = -4$.

б) Для функции $y = -2 - 10(x-1)^2$ величина $(x-1)^2 \geq 0$ при всех значениях x. Поэтому данная функция имеет максимум $y_{max} = -2$ при условии $x - 1 = 0$, т. е. в точке максимума $x_{max} = 1$.

Заметим, что в определение минимума и максимума функции $f(x)$ входит *расплывчатое* для математики *понятие* некоторой окрестности точки a. Но, к сожалению, *уточнить* это *понятие невозможно*. Предположим, что функция имеет несколько максимумов и минимумов (как показано на рисунке). Нам, например, надо найти максимумы этой функции. Есть подозрение, что функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_3. Поэтому будем рассматривать окрестности этой точки. Если в качестве такой окрестности выбрать интервал (a; b) достаточно большой длины, то по определению точка максимума $x_{max} = x_5$. Действительно, для такой окрестности $f(x) \le f(x_5)$. Если в качестве окрестности выбрать интервал (a; x_4), то $x_{max} = x_1$. Если в качестве окрестности выбрать интервал (x_2; x_4), то $x_{max} = x_3$.



Итак, понятно, что некоторая *окрестность* должна быть достаточно *малой длины* (какой именно, непонятно). Кроме того, непонятно, *как искать точки экстремумов* (т. е. в районе какой точки выбирать окрестность и проводить исследование). Ответы на эти вопросы дает только *математический анализ*.

5. Наименьшее и наибольшее значения функции

Определение 7. Число m называют наименьшим значением функции $f(x)$ на множестве $X \subset D(F)$, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = m$;

2) для любого значения $x \in X$ выполнено неравенство $f(x_0) \le f(x)$.

Определение 8. Число M называют наибольшим значением функции $f(x)$ на множестве $X \subset D(F)$, если:

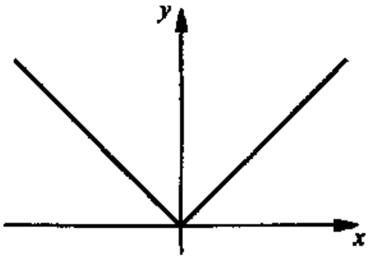
1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = M$;

2) для любого значения $x \in X$ выполнено неравенство $f(x_0) \ge f(x)$.

Наименьшее значение функции обозначают символом $f_{наим}$, наибольшее – символом $f_{наиб}$. Если множество X не указано, то необходимо искать наименьшее и наибольшее значения функции на всей области определения.

Пример 9

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = |x|$ на множестве: а) $X = [2; 4]$; б) $X = [-1; 2]$; в) $X = (2; 4]$; г) $X = (-\infty; +\infty)$.



а) На заданном промежутке функция возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левом конце промежутка, наибольшее – на правом, т. е. $f_{наим} = f(2) = 2$ и $f_{наиб} = f(4) = 4$;

б) на промежутке $[-1; 0]$ данная функция убывает, на промежутке $[0; 2]$ – возрастает. Поэтому точка $x = 0$ – точка минимума и $f_{наим} = f_{min} = f(0) = 0$. Найдем значения функции на концах промежутка: $f(-1) = 1$ и $f(2) = 2$, тогда $f_{наиб} = f(2) = 2$;

в) сравним с пунктом *а*. На данном промежутке функция возрастает. Поэтому наибольшего значения функция достигает на правом конце промежутка $f_{наиб} = f(4) = 4$. Наименьшего значения функция не имеет, так как левый конец промежутка в множество X не входит;

г) сравним с пунктом *б*. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает, на промежутке $[0; +\infty)$ – возрастает. Тогда точка $x = 0$ – точка минимума и $f_{наим} = f_{min} = f(0) = 0$. Наибольшего значения функция не имеет.

Заметим, что в последнем случае функция исследовалась на всей области определения $D(f)$.

Из рассмотренного примера следует, что функция имеет наименьшее или наибольшее значения или *в точках экстремума*, или *на концах* заданного *промежутка*.

6. Четность или нечетность функции

Рассмотрим еще одно свойство функции – *четность*. Предварительно введем новое понятие – *симметричность* области определения. Область определения называется *симметричной*, если функция определена и в точке x_0, и в точке $(-x_0)$ (т. е. в точке, симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Пример 10

а) Областью определения функции $y = \dfrac{2 - 3x}{x^2 - 4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x^2 - 4 = 0$ (т. е. $x = \pm 2$). Поэтому эта функция определена, например, как при $x = -1$, так и при $x = -(-1) = 1$. И наоборот, эта функция не определена и при $x = -2$, и при $x = -(-2) = 2$. Следовательно, область определения данной функции $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ симметричная.

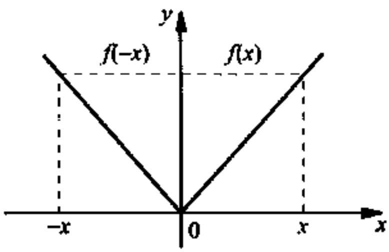
б) Областью определения функции $y = \dfrac{2-3x}{x-4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x - 4 = 0$ (т. е. $x = 4$). Поэтому эта функция определена в точке $x = -4$, но не определена в симметричной точке $x = -(-4) = 4$. Поэтому область определения данной функции $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ не является симметричной.

Понятие *четности* функции вводится *только* для функции *с симметричной областью определения*.

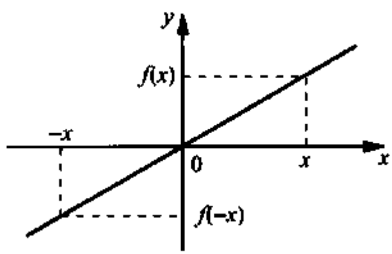
Определение 9. Функция называется *четной*, если *при изменении знака аргумента значение функции не меняется*, т. е. $f(-x) = f(x)$. График четной функции всегда *симметричен относительно оси ординат*.

Определение 10. Функция называется *нечетной*, если *при изменении знака аргумента значение функции* также *меняется на противоположное*, т. е. $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции всегда *симметричен относительно начала координат*.

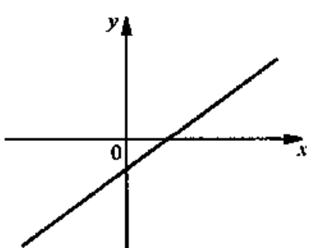
На рисунке приведены (для наглядности) графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности.



Четная функция,
$f(-x) = f(x)$



Нечетная функция,
$f(-x) = -f(x)$



Функция,
не имеющая четности

Пример 11

Выясним четность функций:

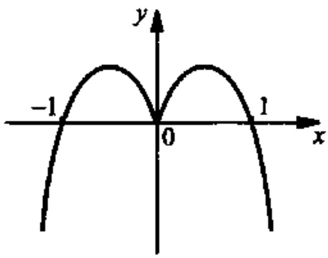
а) $y = |x| - x^2$;

б) $y = x - x^3$;

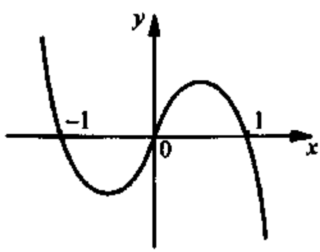
в) $y = x - 2$.

Прежде всего, отметим, что области определения всех трех функций $x \in (-\infty; +\infty)$ симметричные. Для выяснения четности этих функций $y(x)$ надо найти значение $y(-x)$ и сравнить значения $y(x)$ и $y(-x)$.

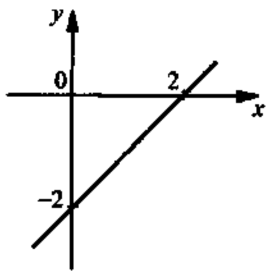
а) $y(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$ (здесь учтено, что $|-x| = |x|$ и $(-x)^2 = x^2$). Теперь легко видеть, что $y(-x)$ совпадает с данной функцией $y(x)$, т. е. $y(-x) = y(x)$. Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.



б) $y(-x) = -x - (-x)^3 = -x - (-x^3) = -x + x^3 = -(x - x^3) = -y(x)$. Видно, что значения функции в точках x и $-x$ противоположны по знаку, т. е. $y(-x) = -y(x)$. Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.



в) $y(-x) = -x - 2$. Сравнивая значение $y(-x) = -x - 2$ со значением $y(x) = x - 2$, видим, что равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется. Поэтому эта функция не является четной. Найдем теперь величину $-y(x) = -(x - 2) = 2 - x$. Сравнивания значение $y(-x) = -x - 2$ со значением $-y(x) = 2 - x$, видим, что равенство $y(-x) = -y(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не является нечетной.



Итак, данная функция никакой четности не имеет и ее график не обладает никакой симметрией.

Понятие четности и нечетности функции *облегчает построение* ее *графика*. Достаточно *построить часть графика для неотрицательных значений* x, а затем *отразить полученный график относительно оси ординат* (*в случае четной функции*) или *начала координат* (*в случае нечетной функции*).

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 12

Функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ является четной, так как ее область определения $D(f) = (-\infty; \infty)$ симметрична и $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$.

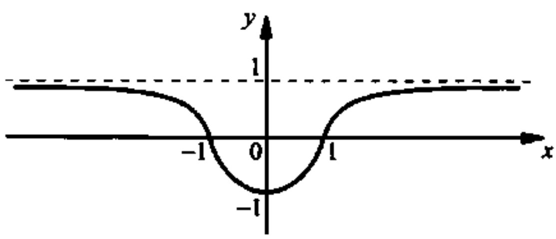


График этой функции симметричен относительно оси ординат.

7. Непрерывность функции

Как известно, существуют *непрерывные* на промежутке X функции, и их графики не имеют точек разрыва, т. е. представляют собой *сплошные линии*. Также есть функции, которые в некоторых точках имеют *разрыв*, а их графики не являются сплошными линиями, т. е. в некоторых точках имеют *скачки*.

Определение 11. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной* в точке $x = a$, если при $x \to a$ величина $f(x) \to f(a)$. Можно сформулировать и по-другому: функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если при $x - a \to 0$ разность $f(x) - f(a) \to 0$.

Пример 13

Докажем, что функция $f(x) = 3x - 2$ непрерывна во всех точках области определения.

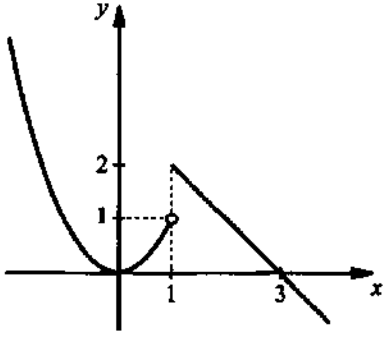
Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; \infty)$.

Возьмем любую точку $x = a$ из области определения $D(f)$. Найдем разность $f(x)-f(a)=(3x-2)-(3a-2)=3(x-a)$. Очевидно, если $x - a \to 0$, то и величина $3(x - a) \to 0$, т. е. $f(x) - f(a) \to 0$. Тогда по определению функция $f(x)$ непрерывна во всех точках области определения.

Пример 14

Докажем, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\in(-\infty;1), \\ 3-x & \text{при } x\in[1;+\infty) \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 1$.

Найдем значение $f(1) = 3 - 1 = 2$. Пусть $x < 1$ и $x \to 1$, т. е. $1 - x \to 0$. Найдем разность $f(x)-f(1)=x^2-2=(x^2-1)-1=(x-1)(x+1)-1=$ $=-(1-x)(x+1)-1$. При $x \to 1$ величина $x + 1 \to 2$, $1 - x \to 0$ и произведение $(1 - x)(x + 1) \to 0$. Тогда разность $f(x) - f(1) \to -1$. Поэтому данная функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = 1$, т. е. имеет разрыв в этой точке.

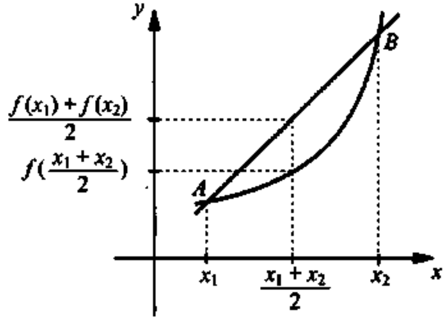


8. Выпуклость графика функции

Определение 12. Если для любых точек x_1 и x_2 из промежутке $X \subset D(f)$ выполнено неравенство $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, то график функции $f(x)$ имеет *выпуклость вниз* на промежутке X. При этом на промежутке $[x_1; x_2]$ график расположен ниже хорды AB (рис. *а*).

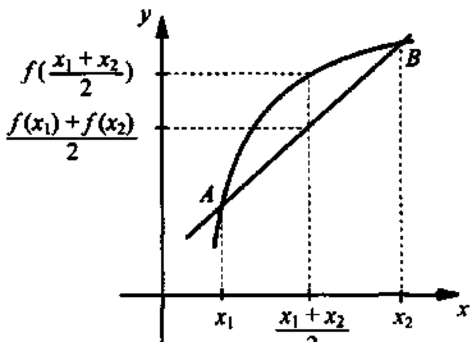
Определение 13. Если для любых точек x_1 и x_2 из промежутка $X \subset D(f)$ выполнено неравенство $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, то график функции $f(x)$ имеет *выпуклость вверх* на промежутке X. При этом на промежутке $[x_1; x_2]$ график расположен выше хорды AB (рис. *б*).

а



Выпуклость вниз

б



Выпуклость вверх

Пример 15

Докажем, что график функции $f(x) = x^2$ имеет выпуклость вниз.

Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 из $D(f)$. Найдем: $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \dfrac{x_1^2+x_2^2}{2}$ и

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$. Разность этих величин $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=$

$=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}=\frac{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}{4}=\frac{(x_1-x_2)^2}{4}$. Очевидно, что эта величина положительна, так как $x_1 \neq x_2$. Тогда $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ и график функции имеет выпуклость вниз.

В процессе обучения будут рассмотрены и другие свойства функций.

IV. Контрольные вопросы

1. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
2. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции.
3. Функция, ограниченная снизу (сверху).
4. Определение точки минимума (максимума) функции. Экстремумы функции.
5. Наименьшее и наибольшее значения функции.
6. Четность и нечетность функции.
7. Непрерывность функции.
8. Выпуклость графика функции.

V. Задание на уроках

§ 2, № 1 (а, б); 2 (в, г); 4 (а, б); 5 (в, г); 6 (а, б); 7 (в, г); 8 (а, б); 10 (в, г); 11 (а, б); 12; 14.

VI. Задание на дом

§ 2, № 1 (в, г); 2 (а, б); 4 (в, г); 5 (а, б); 6 (в, г); 7 (а, б); 8 (в, г); 10 (а, б); 11 (в, г); 13; 15.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 9–10. Исследование функций (факультативное занятие)

Цель: отработать схему исследования функции, построения графика функции.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определения возрастающей функции и минимума функции.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции $y = x^2 - 3|x|$, ее наименьшее и наибольшее значения на отрезке [–1; 4]. Постройте график функции.

Вариант 2

1. Дайте определения убывающей функции и максимума функции.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции $y = 2|x| - x^2$, ее наименьшее и наибольшее значения на отрезке [–2; 3]. Постройте график функции.

III. Изучение нового материала

Построение графиков функций

В младших классах, пожалуй, единственным методом построения графиков функций был способ построения «по точкам». В случае хорошо *изученных функций* (линейной, квадратичной, дробно-линейной, степенной и т. д.) такой *способ дает хорошие результаты*. В случае незнакомой функции при использовании этого способа можно просмотреть какие-то принципиальные особенности поведения функции. Например, в физике очень распространены *резонансные явления*. Суть их состоит в том, что *при плавном изменении* какой-то физической величины вдруг возникает *очень резкое ее увеличение или уменьшение.*

Таким образом, *для* грамотного и обоснованного *построения графика функции* предварительно *необходимо* эту функцию *исследовать*. На примере покажем, какие *этапы* необходимо пройти *при исследовании функции и построении ее графика*.

Пример 1

Исследуем функцию $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ и построим ее график.

1. *Найдем область определения функции*. Так как знаменатель $x^2 + 1$ дроби не обращается в нуль, то $D(y)$ – вся числовая прямая.

2. *Определим особенности функции*. Очевидно, что данная функция четная. Действительно, $y(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = y(x)$. Поэтому исследуем и построим график функции при $x \geq 0$. Затем эту часть графика отразим влево относительно оси ординат.

3. *Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.* Чтобы найти точку пересечения *с осью ординат, положим* $x = 0$ и получим $y = -1$. Точка пересечения с осью ординат $(0; -1)$. Чтобы найти точку пересечения *с осью абсцисс, положим* $y = 0$ *и получим уравнение* $0 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ или $0 = x^2 - 1$, откуда $x = 1$. Точка пересечения с осью абсцисс $(1; 0)$.

4. *Выясним промежутки знакопостоянства функции*, т. е. на каких промежутках функция принимает положительные значения, а на каких – отрицательные. Для нахождения промежутка отрицательности функции решим неравенство $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 0$ или $x^2 - 1 < 0$, откуда $0 \le x < 1$. Для нахождения промежутка положительности функции решим неравенство $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$ или $x^2 - 1 > 0$, откуда $x > 1$.

5. *Определим монотонность функции.* Пусть x_2 и x_1 – две точки из промежутка $[0; \infty)$, причем $x_2 > x_1$. Запишем функцию в виде $y(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$. Найдем разность $y(x_2) - y(x_1) =$
$= \left(1 - \frac{2}{x_2^2+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{x_1^2+1}\right) = \frac{2}{x_1^2+1} - \frac{2}{x_2^2+1} = \frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$. В этой дроби знаменатель всегда положительный. В числителе множитель $x_2 - x_1 > 0$ (так как $x_2 > x_1$), $x_2 + x_1 > 0$ (так как $x_{1,2} > 0$). Потому числитель дроби также положительный. Следовательно, дробь положительна, так как $y(x_2) - y(x_1) > 0$ или $y(x_2) > y(x_1)$. Поэтому функция $y(x)$ возрастает на промежутке $[0; \infty)$. Учитывая четность функции $y(x)$, на промежутке $(-\infty; 0]$ она убывает.

6. *Найдем экстремумы функции.* Так как только в точке $x = 0$ убывание функции сменяется возрастанием, то точка минимума $x_{\min} = 0$ и минимум функции $y_{\min} = -1$.

7. *Выясним поведение функции при больших значениях x.* Данная функция имеет вид: $y = 1 - \frac{2}{x^2+1}$. При неограниченном возрастании x знаменатель дроби $x^2 + 1$ также неограниченно возрастает. Поэтому значения дроби $\frac{2}{x^2+1}$ приближаются к нулю, оставаясь положительными. Следовательно, значения функции $y(x)$ неограниченно приближаются к 1, оставаясь меньше 1. Поэтому прямая $y = 1$ является *горизонтальной асимптотой* функции $y(x)$.

8. *Наименьшее значение* функции $y_{наим} = -1$ достигается при $x = 0$, наибольшего значения нет.

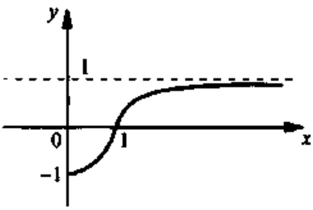
9. *Функция ограничена.*

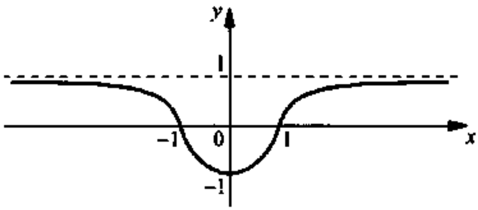
10. *Функция непрерывная.*

11. *Выпуклость* графика функции установить трудно (она меняется).

Исследованные свойства функции $y(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ позволяют построить ее график. Сделаем сначала такое построение для промежутка $x \in [0; \infty)$.

Построим точки пересечения с осями координат $(0; -1)$, $(1; 0)$. Учтем, что на промежутке $[0; 1)$ значения $y < 0$, на промежутке $(1; \infty)$ значения $y > 0$. Значения функции возрастают от $y = -1$ и стремятся к значению $y = 1$ при больших x. Проводим непрерывную кривую.





Учитывая четность данной функции $y(x)$, отражаем кривую, построенную при $x \geq 0$, влево симметрично относительно оси ординат. Получаем график функции $y(x)$.

Схема исследования функции

На рассмотренном примере были фактически отработаны все *этапы* такого *исследования*. Они сводятся к следующему:

1. Найти области определения и значений функции $y(x)$.

2. Выяснить особенности функции, облегчающие ее исследование и построение графика: а) четность или нечетность; б) периодичность.

3. Вычислить координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

4. Найти промежутки знакопостоянства функции.

5. Определить промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

6. Найти точки экстремума, определить вид экстремума (максимум или минимум), вычислить экстремум функции.

7. Исследовать поведение функции в окрестности точек разрыва (как правило, возникают вертикальные асимптоты) и при больших по модулю значениях аргумента (могут возникать горизонтальные или наклонные асимптоты).

8. Найти наименьшее и наибольшее значения функции.

Заметим, что этот план носит *ориентировочный характер*. Практически любой пункт плана может вызвать *технические трудности*, например даже в пункте 1 при нахождении области определения и значений данной функции $f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ рациональная, т. е. имеет вид: $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$ (где $h(x)$, $g(x)$ – некоторые многочлены). Тогда область определения функции $f(x)$ задается условием $g(x) \neq 0$. Поэтому необходимо найти корни многочлена $g(x)$. Если этот многочлен имеет степень выше второй и иррациональные корни, то такая задача *практически нерешаема*. Нахождение *области значений* функции $f(x)$ является *еще более тяжелой задачей*. Для этого необходимо найти *промежутки монотонности* функции $f(x)$, ее *экстремумы*, исследовать *поведение функции* $f(x)$ *при больших значениях* $|x|$. Эти процедуры можно выполнить только с помощью теории *предела функции*, которая изучается в школе в очень урезанном объеме (см. главу 5).

Остановимся на понятии *асимптот графика функции* $f(x)$. Асимптоты разделяются на два вида – *вертикальные* и *наклонные* (в частности, *горизонтальные*). Строгое определение асимптот может быть дано только с помощью теории *предела функции*. Поэтому ограничимся только *понятием асимптот*.

Вертикальная *прямая* $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* функции $f(x)$, если *при приближении* значений x *к величине* a *значения функции* $f(x)$ *неограниченно возрастают или убывают*, т. е. при $x \to a$ $f(x) \to \pm\infty$.

Пример 2

Рассмотрим функцию $y(x)=\dfrac{1}{x-2}$ и построим ее график.

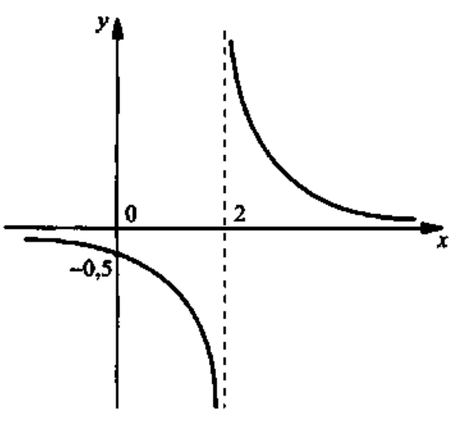
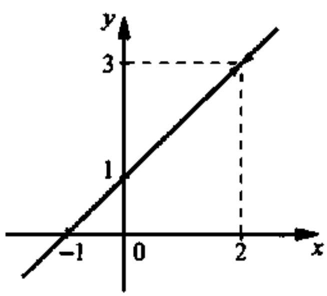


График данной функции получается из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ его смещением на 2 единицы вправо. Видно, что при $x \to 2$ (при этом $x < 2$) знаменатель $x - 2$ отрицательный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ неограниченно убывают, т. е. $y \to -\infty$. При $x \to 2$ (при этом $x > 2$) знаменатель $x - 2$ положительный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ неограниченно возрастают, т. е. $y \to \infty$. Следовательно, вертикальная прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой данной функции $y = \dfrac{1}{x-2}$.

Из примера видно, что часто *в случае рациональных функций* вертикальными *асимптотами* являются те *значения x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль*. Однако *не всегда* в случае рациональных функций *возникают вертикальные асимптоты* (даже если знаменатель дроби обращается в нуль).

Пример 3

Построим график функции $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.



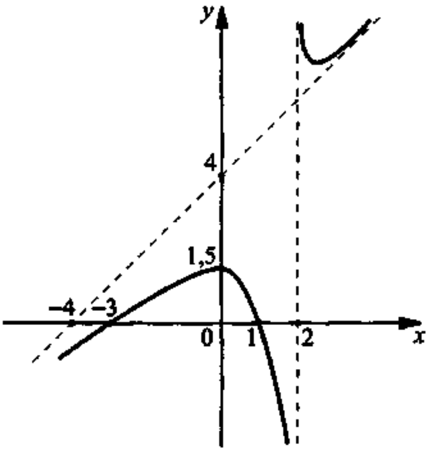
Разложим числитель данной дроби на множители и сократим ее. Получаем: $y = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x + 1$ (при этом $x \neq 2$). Видно, что при $x \to 2$ значения функции $y \to 3$. Поэтому данная функция вертикальной асимптоты не имеет. Существует только значение $x = 2$, при котором функция не определена.

Обратимся теперь к понятию *наклонной асимптоты*. *Прямая* $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* функции $f(x)$, если *при неограниченном возрастании или убывании x значения функции $f(x)$*

стремятся к значениям линейной *функции* $y(x)$, т. е. при $x \to \pm\infty$ $f(x) \to y(x)$.

Пример 4

Построим график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$.



Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ находим: $y = \dfrac{-3}{-2} = 1{,}5$ – точка пересечения с осью ординат. При $y = 0$ получаем уравнение $0 = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ или $0 = x^2 + 2x - 3$, корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ – точки пересечения с осью абсцисс.

Очевидно, что прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота. При $x \to 2$ числитель дроби $x^2 + 2x - 3 \to 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$. При $x < 2$ знаменатель дроби $x - 2$ отрицательный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to -\infty$. При $x > 2$ знаменатель дроби $x - 2$ положительный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to \infty$.

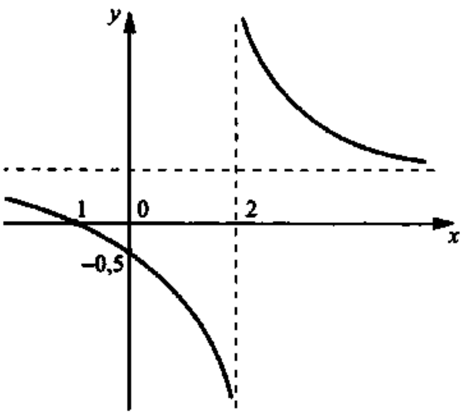
Разделим числитель дроби $x^2 + 2x - 3$ на ее знаменатель $x - 2$ столбиком и выделим целую часть. Тогда функция $y(x)$ имеет вид $y = x + 4 + \dfrac{5}{x - 2}$. Очевидно, при $x \to \infty$ дробь $\dfrac{5}{x - 2} \to 0$ и значения функции $y(x)$ стремятся к значениям линейной функции $y = x + 4$. Поэтому линейная функция $y = x + 4$ является *наклонной асимптотой* для данной функции $y(x)$.

Учитывая точки пересечения графика функции с осями координат, наличие вертикальной и наклонной асимптот, строим график данной функции. Очевидно, что график функции не пересекает асимптоты. На графике видно, что функция имеет максимум и минимум (найти их координаты можно только с помощью производной).

Частным случаем наклонной асимптоты является *горизонтальная асимптота* (при $k = 0$). *Горизонтальная прямая* $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* функции $f(x)$, если *при неограниченном возрастании или убывании* x *значения функции* $f(x)$ *стремятся к величине* b, т. е. при $x \to \pm\infty$ $f(x) \to b$.

Пример 5

Построим график функции $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.



Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При $x = 0$ находим: $y = -0{,}5$ – точка пересечения с осью ординат. При $y = 0$ получаем уравнение $0 = \dfrac{x+1}{x-2}$ или $0 = x + 1$, корень которого $x = -1$ – точка пересечения с осью абсцисс.

Очевидно, что прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота. При $x \to 2$ числитель дроби $x + 1 \to 3$. При $x < 2$ знаменатель дроби $x - 2$ отрицательный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to -\infty$. При $x > 2$ знаменатель дроби $x - 2$ положительный и $x - 2 \to 0$. Поэтому значения функции $y \to \infty$.

Разделим числитель дроби $x + 1$ на ее знаменатель $x - 2$ столбиком и выделим целую часть. Тогда функция $y(x)$ имеет вид: $y = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

Очевидно, при $x \to \infty$ дробь $\frac{3}{x-2} \to 0$ и значения функции $y(x)$ стремятся к 1. Поэтому прямая $y = 1$ является *горизонтальной асимптотой* для графика данной функции $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Учитывая проведенное исследование данной функции, строим ее график. Очевидно, что такой график получается смещением графика функции $y = \frac{3}{x}$ на 2 единицы вправо и на 1 единицу вверх.

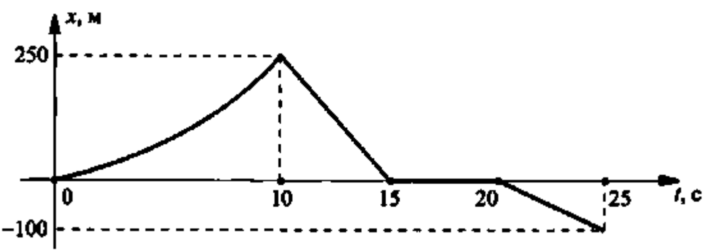
Чтение графиков функций

Практически во всех исследованиях результаты представляются в виде графиков. Поэтому необходимо уметь их читать, т. е. понимать и представлять свойства функций, которые им соответствуют.

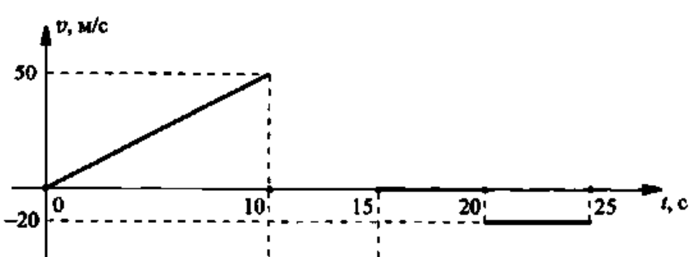
Пример 6

На рис. *а* представлена зависимость $x(t)$ для точки, двигающейся из пункта A в пункт B (где x – координата точки, начало отсчета совмещено с пунктом A).

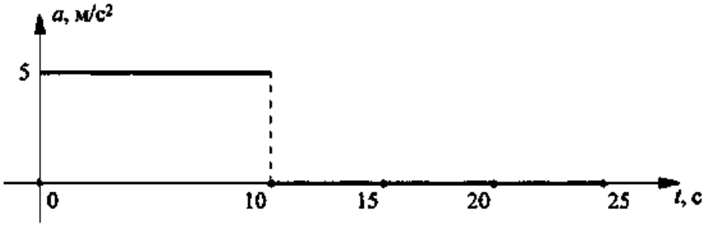
а



б



в



Опишем происходящее движение, которое дополнительно будем иллюстрировать графиками *б*: зависимостью скорости от времени $v(t)$ и *в*: зависимостью ускорения от времени $a(t)$. При этом координата (перемещение) x измеряется в м, скорость v – в м/с, ускорение a – в м/с^2, время t – в с.

На промежутке $0 \div 10$ с перемещение x меняется по квадратичному закону, т. е. движение является равноускоренным. Поэтому скорость v меняется по линейному закону и ускорение a постоянно. При этом точка движется по направлению от A к B, так как перемещение x имеет положительный знак.

При $t = 10$ с точка изменяет направление движения на противоположное и начинает двигаться к пункту A. При этом координата x меняется по линейному закону, т. е. движение является равномерным со скоростью $v = -50$ м/с. Отрицательный знак скорости при $t = 10 \div 15$ с указывает на движение в направлении к пункту A. Очевидно, что ускорение $a = 0$.

В течение времени $t = 15 \div 20$ с координата x не меняется и $x = 0$. Это означает, что точка находится в состоянии покоя в пункте A. Разумеется скорость $v = 0$ и ускорение $a = 0$.

На промежутке $t = 20 \div 25$ с координата x меняется по линейному закону, т. е. движение является равномерным со скоростью $v = -20$ м/с. Отрицательные знаки перемещения x и скорости v указывают на удаление точки от пунктов A и B. Разумеется, ускорение $a = 0$.

IV. Контрольные вопросы

1. Приведите схему исследования функции.
2. Дайте определение вертикальной асимптоты графика функции.
3. Приведите определение наклонной асимптоты графика функции.
4. Дайте определение горизонтальной асимптоты графика.

V. Творческое задание

Проведите исследование функции и постройте ее график:

1) $y=\frac{x-2}{x+1}$;

2) $y=\frac{1-x}{x+2}$;

3) $y=\frac{x+1}{x^2+3x+2}$;

4) $y=\frac{x+1}{x^2-4}$;

5) $y=\frac{x-2}{x^2+2x+3}$;

6) $y=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$;

7) $y=\frac{x^2+3x+2}{x-1}$;

8) $y=\sqrt{4-x^2}$;

9) $y=\frac{x-3}{x-1}$;

10) $y=\frac{x-3}{2-x}$;

11) $y=\frac{1-x}{x^2-4x+3}$;

12) $y=\frac{1-x}{x^2-9}$;

13) $y=\frac{3-x}{x^2+3x+4}$;

14) $y=\frac{x^2-4x+3}{1-x}$;

15) $y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$;

16) $y=2-\sqrt{9-x^2}$.

VI. Подведение итогов уроков

Урок 11. Обратная функция

Цель: обсудить понятие обратной функции и ее свойства.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Проведите исследование функции и постройте ее график:

а) $y=4x-x^2$;

б) $y=\frac{x-2}{x+1}$.

Вариант 2

Проведите исследование функции и постройте ее график:

а) $y=x^2-6x$;

б) $y=\frac{1-x}{x+2}$.

III. Изучение нового материала

По аналитическому виду функции для любого значения аргумента легко найти соответствующее значение функции y. Часто возникает *обратная задача*: известно значение y и необходимо найти значение аргумента x, при котором оно достигается.

Пример 1

Найдем значение аргумента x, если значение функции $y=\dfrac{3x+1}{4x-2}$ равно: а) 2; б) $\dfrac{7}{6}$; в) 1.

Из аналитического вида функции $y=\dfrac{3x+1}{4x-2}$ выразим переменную x и получим: $4xy - 2y = 3x + 1$ или $x(4y - 3) = 2y + 1$, откуда $x=\dfrac{2y+1}{4y-3}$. Теперь легко решить задачу:

$$\text{а) } x=\frac{2\cdot2+1}{4\cdot2-3}=\frac{5}{5}=1;\ \text{б) } x=\frac{2\cdot\frac{7}{6}+1}{4\cdot\frac{7}{6}-3}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}=2;\ \text{в) } x=\frac{2\cdot1+1}{4\cdot1-3}=\frac{3}{1}=3.$$

Функцию $x=\dfrac{2y+1}{4y-3}$ называют *обратной* по отношению к функции $y=\dfrac{3x+1}{4x-2}$. Так как принято аргумент функции обозначать буквой x, а значение функции – буквой y, то обратную функцию записывают в виде $y=\dfrac{2x+1}{4x-3}$.

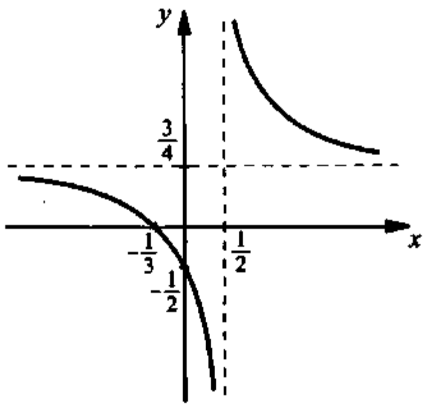
Дадим необходимые для изучения темы понятия.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют *обратимой*, если любое свое значение она принимает только в одной точке x множества X (другими словами, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции). В противном случае функцию называют *необратимой*.

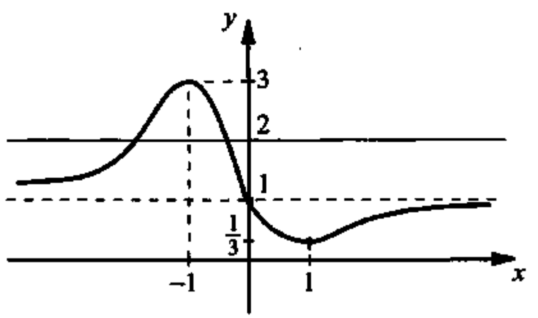
Пример 2

Функция $y=\dfrac{3x+1}{4x-2}$ каждое свое значение принимает только в одной точке x и является обратимой (график *а*). Функция $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ имеет такие значения y (например, $y = 2$), которые достигаются в двух различных точках x, и является необратимой (график *б*).

а



б



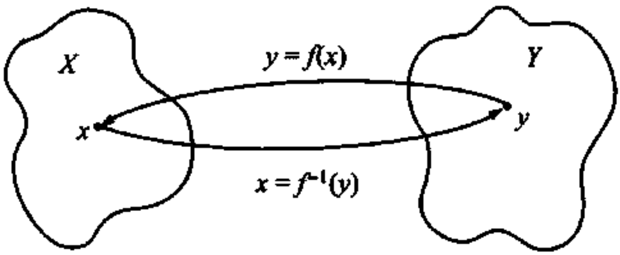
При рассмотрении темы полезна следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ монотонна на множестве X, то она обратима.

Пример 3

Вернемся к предыдущему примеру. Функция $y = \dfrac{3x+1}{4x-2}$ убывает (монотонна) и обратима на всей области определения. Функция $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ немонотонна и необратима. Однако эта функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на отрезке $[-1; 1]$. Поэтому на таких промежутках функция обратима. Например, функция обратима на отрезке $x \in [-1; 1]$.

Определение 2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ – обратимая функция и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$ (т. е. единственный корень уравнения $f(x) = y$ относительно переменной x). Тогда получим функцию, которая определена на множестве Y (множество X – ее область значений). Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ и называют *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$. На рисунке показаны функция $y = f(x)$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$.



Прямая и обратная функции имеют *одинаковую монотонность.*

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, а Y – ее область значений, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на множестве Y.

Пример 4

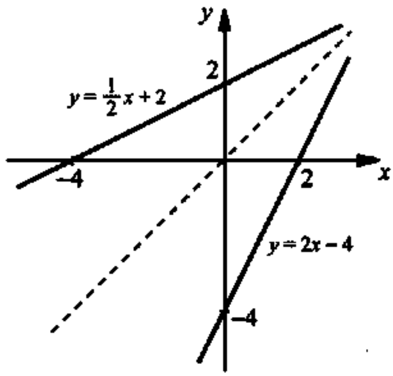
Функция $y = \dfrac{3x+1}{4x-2}$ убывает на множестве $X = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ и имеет множество значений $Y = \left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. Обратная функция $x = \dfrac{2y+1}{4y-3}$ также убывает на множестве $Y = \left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$ и имеет множество значений $X = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Очевидно, что графики функций $y = \dfrac{3x+1}{4x-2}$ и $x = \dfrac{2y+1}{4y-3}$ *совпадают*, так как эти функции приводят к одной и той же зависимости между переменными x и y: $4xy - 3x - 2y - 1 = 0$.

Для нас привычно, что аргумент функции обозначают буквой x, значение функции – буквой y. Поэтому обратную функцию будем записывать в виде $y = f^{-1}(x)$ (см. пример 1).

Теорема 3. Графики функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}$ симметричны относительной прямой $y = x$.

Пример 5

Для функции $y = 2x - 4$ найдем обратную функцию: $y + 4 = 2x$, откуда $x = \frac{1}{2}y + 2$. Введем переобозначения $x \rightleftarrows y$ и запишем обратную функцию в виде $y = \frac{1}{2}x + 2$. Таким образом, для функции $f(x) = 2x - 4$ обратная функция $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Построим графики этих функций. Видно, что графики симметричны относительной прямой $y = x$.



Функция $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$ обратная по отношению к функции $f(x) = 2x - 4$. Но и функция $f(x) = 2x - 4$ является обратной по отношению к функции $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Поэтому функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ корректнее называть *взаимообратными*. При этом выполнены равенства: $f^{-1}(f(x)) = x$ и $f(f^{-1}(x)) = x$.

IV. Контрольные вопросы

1. Обратимые и необратимые функции.
2. Обратимость монотонной функции.
3. Определение обратной функции.
4. Монотонность прямой и обратной функций.
5. Графики прямой и обратной функций.

V. Задание на уроке

§ 3, № 1 (а, б); 2 (в, г); 3 (а, г); 4 (в, г); 5 (а, в).

VI. Задание на дом

§ 3, № 1 (в, г); 2 (а, б); 3 (б, в); 4 (а, б); 5 (б, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 12–13. Контрольная работа по теме «Числовые функции»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

Контрольная работа составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее и варианты 5, 6 самые сложные). При этом сложность вариантов нарастает не очень резко. Каждый вариант содержит 6 задач примерно одинаковой сложности (может быть, несколько сложнее две последние задачи).

При проверке вариантов 1, 2 оценка «5» ставится за правильное решение пяти задач, оценка «4» – четырех задач и оценка «3» – трех задач. Одна задача является резервной (или запасной) и дает некоторую возможность выбора учащимся. При таких же критериях оценки в случае вариантов 3, 4 дается дополнительно 0,5 балла и в случае вариантов 5, 6 – дополнительно 1 балл (учитывая более высокую сложность этих вариантов). Поэтому в случае вариантов 5, 6 оценку «5» можно получить за правильное решение четырех задач.

Выбор вариантов может быть сделан учителем или учащимся (при этом число экземпляров вариантов должно быть достаточным). Разумеется, учащиеся должны знать о различной сложности вариантов и критериях оценки контрольной работы.

III. Варианты работы

Вариант 1

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x - 5$.

2. Определите четность или нечетность функции $y = 2x^3 - 5x + \sqrt[3]{x}$.

3. Для функции $f(x) = 3x + 2$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$.

4. Найдите значение функции $f(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{1-\left(\dfrac{1-x}{2x}\right)^{-1}}$ при $x = \dfrac{3}{10}$.

5. Постройте график функции:

а) $y = (x+3)^2 - 1$;

б) $y = \sqrt{-2-x}$.

Вариант 2

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, наибольшее значение функции $y = 7 - 6x - x^2$.

2. Определите четность или нечетность функции $y=3x^4+4x^2+\sqrt{|x|}$.

3. Для функции $f(x) = 5x - 1$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$.

4. Найдите значение функции $f(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{2-x}}{2-\left(\dfrac{2-x}{2x}\right)^{-1}}$ при $x=\dfrac{6}{7}$.

5. Постройте график функции:
а) $y=(x-2)^2-1$;
б) $y=\sqrt{3-x}$.

Вариант 3

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, наименьшее значение функции $y=3\sqrt{x^2+4}$.

2. Определите четность или нечетность функции $y=4x^6-3x^4+2\sqrt{|x|}+3$.

3. Для функции $f(x)=\dfrac{2x}{3x-1}$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$.

4. Найдите значение функции $f(x)$, если $f(3-x)=x^2+x^{-1}$.

5. Постройте график функции:
а) $y=2x+|x-3|$;
б) $\dfrac{y-x^2+1}{x-2}=0$.

Вариант 4

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, наибольшее значение функции $y=-4\sqrt{x^2+9}$.

2. Определите четность или нечетность функции $y=5x^7+2x^3-6x+\dfrac{x}{|x|}$.

3. Для функции $f(x)=\dfrac{5x+2}{3x}$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$.

4. Найдите значение функции $f(x)$, если $f(1-x)=x+x^{-2}$.

5. Постройте график функции:

а) $y = 3x - |x + 2|$;

б) $\dfrac{y + x^2 - 2}{x + 1} = 0$.

Вариант 5

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, наибольшее значение функции $y = \dfrac{2x^2 + 9}{x^2 + 3}$.

2. Определите четность или нечетность функции $y = 5x^7 - 2x^3 + \dfrac{3x^5}{2x^4 + 1} - \sqrt[3]{2x}$.

3. Для функции $f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^3 + 3}$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$.

4. Дана функция $f(x) = (2 - x)^{-1} + 3x^{-1}$. Найдите $f(4)$ и $f(6)$ и сравните числа $f(f(4))$ и $f(f(6))$.

5. Постройте график функции:

а) $y = \min(x + 2;\ x^2)$;

б) $y = \dfrac{(x + 4)(x^2 + 3x + 2)}{x + 1}$.

Вариант 6

1. Найдите промежутки возрастания и убывания, наименьшее значение функции $y = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2 + 1}$.

2. Определите четность или нечетность функции $y = 4x^6 + 3x^4 - \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3} + 5\sqrt{|x|^3}$.

3. Для функции $f(x) = \dfrac{3x^3 + 1}{x^3 - 2}$ найдите обратную функцию $f^{-1}(x)$.

4. Дана функция $f(x) = (4 - x)^{-1} + x^{-1}$. Найдите $f(8)$ и $f(-4)$ и сравните числа $f(f(8))$ и $f(f(-4))$.

5. Постройте график функции:

а) $y = \max(-x - 2;\ -x^2)$;

б) $y = \dfrac{(x - 3)(x^2 - 7x + 10)}{x - 2}$.

Урок 14. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

1. Распределение работ по вариантам и результаты решения. Данные о результатах работы удобно заносить в таблицу (для каждой пары вариантов).

№ задачи / Итоги	1	2	3	...	6
+	5				
±	1				
–	1				
Ø	1				

Обозначения:

\+ – число решивших задачу правильно или почти правильно;

± – число решивших задачу со значительными ошибками;

– – число не решивших задачу;

Ø – число не решавших задачу. Вариант 1, 2 – 8 учеников.

2. Типичные ошибки, возникшие при решении задач.

3. Наиболее трудные задачи и их разбор (учителем или школьниками, решившими эту задачу).

4. Разбор всей контрольной работы (вывесить на стенде ответы к заданиям вариантов и разобрать наиболее трудные варианты).

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. Возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 2]$, $y_{наим} = y(2) = -9$.

2. Функция нечетная.

3. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

4. $f\left(\frac{3}{10}\right) = 6$.

5. *а*, *б* построены.

Вариант 2

1. Возрастает на промежутке $(-\infty; -3]$ и убывает на промежутке $[-3; +\infty)$, $y_{\text{наиб}} = y(-3) = 16$.

2. Функция четная.

3. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$.

4. $f\left(\frac{6}{7}\right) = 3$.

5. *а*, *б* построены.

Вариант 3

1. Возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, $y_{\text{наим}} = y(0) = 6$.

2. Функция четная.

3. $f^{-1}(x) = \frac{x}{3x-2}$.

4. $f(x) = (3-x)^2 + (3-x)^{-1}$.

5. *а*, *б* построены.

Вариант 4

1. Возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$, $y_{\text{наиб}} = y(0) = -12$.

2. Функция нечетная.

3. $f^{-1}(x) = \frac{2}{3x-5}$.

4. $f(x) = 1 - x + (1-x)^{-2}$.

5. *а*, *б* построены.

Вариант 5

1. Запишем данную функцию в виде $y = \frac{2(x^2+3)+3}{x^2+3} = 2 + \frac{3}{x^2+3}$.

Дробь $\frac{3}{x^2+3}$ с ростом $|x|$ убывает. Поэтому функция $y(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$. Наибольшее значение функции $y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$.

Ответ: возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$, $y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$.

2. Область определения функции $(-\infty; +\infty)$. Найдем: $y(-x) = 5(-x)^7 -$

$$-2(-x)^3 + \frac{3(-x)^5}{2(-x)^4+1} - \sqrt[3]{2\cdot(-x)} = -5x^7 + 2x^3 - \frac{3x^5}{2x^4+1} + 2\sqrt{x} = -y(x).$$

Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то данная функция нечетная.

Ответ: функция нечетная.

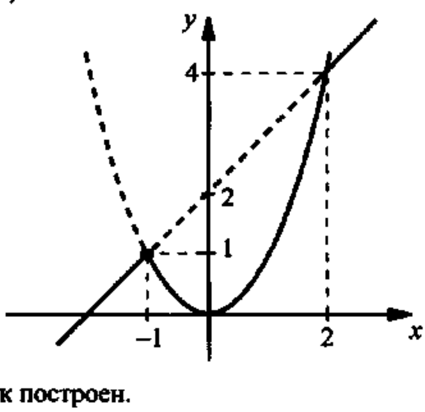
3. Из равенства $y=\dfrac{2x^3-1}{x^3-3}$ выразим x: $yx^3+3y=2x^3-1$, тогда $x^3=\dfrac{3y+1}{2-y}$ и $x=\sqrt[3]{\dfrac{3y+1}{2-y}}$. Введем переобозначения $x \rightleftarrows y$ и найдем обратную функцию: $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{2-x}}$ или $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{2-x}}$.

Ответ: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{2-x}}$.

4. Запишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{3}{x}$. Найдем: $f(4)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$, $f(6)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$. Тогда $f(f(4))=f(f(6))=12\dfrac{4}{7}$.

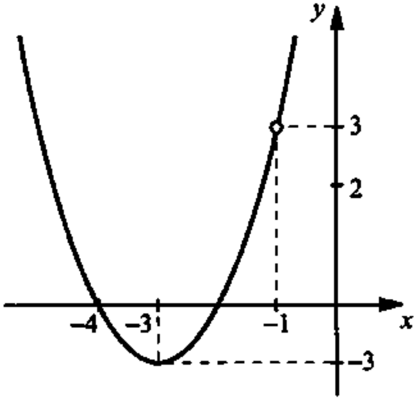
Ответ: $f(4)=f(6)=\dfrac{1}{4}$, $f(f(4))=f(f(6))=12\dfrac{4}{7}$.

5, а. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = x+2$ и $y_2 = x^2$ (пунктирные линии). Они пересекаются в точках $(-1; 1)$ и $(2; 4)$. При каждом значении x из значений функций y_1 и y_2 выбираем наименьшее значение. Получаем график данной функции (сплошная линия).



Ответ: график построен.

5, б. Разложим числитель дроби на множители и сократим ее. Получаем: $y=\dfrac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+1}=(x+4)(x+2)$. Таким образом, надо построить график функции $y = (x + 4)(x + 2)$ (парабола) при условии $x + 1 \neq 0$, т. е. $x \neq -1$.



Ответ: график построен.

Вариант 6

1. Запишем данную функцию в виде $y = \dfrac{2(x^2+1)-6}{x^2+1} = 2 - \dfrac{6}{x^2+1}$.

Дробь $\dfrac{6}{x^2+1}$ с ростом $|x|$ убывает. Поэтому функция $y(x)$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. Наименьшее значение функции $y_{наим} = y(0) = -4$.

Ответ: возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, $y_{наим} = y(0) = -4$.

2. Область определения функции $\left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \cup \left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}; \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

Найдем: $y(-x) = 4(-x)^6 + 3(-x)^4 - \dfrac{(-x)^2+1}{2(-x)^2-3} + 5\sqrt{|-x|^3} = 4x^6 + 3x^4 -$

$-\dfrac{x^2+1}{2x^2-3} + 5\sqrt{|x|^3} = y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = y(x)$, то данная функция четная.

Ответ: функция четная.

3. Из равенства $y = \dfrac{3x^3+1}{x^3-2}$ выразим x: $yx^3 - 2y = 3x^3 + 1$, тогда

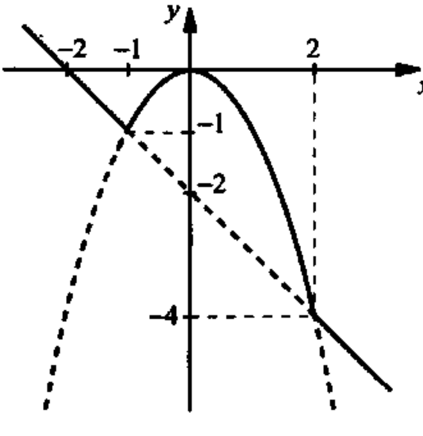
$x^3 = \dfrac{2y+1}{y-3}$ и $x = \sqrt[3]{\dfrac{2y+1}{y-3}}$. Введем переобозначения $x \rightleftarrows y$ и найдем обратную функцию: $y=\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-3}}$ или $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-3}}$.

Ответ: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-3}}$.

4. Запишем функцию в виде $f(x)=\frac{1}{4-x}+\frac{1}{x}$. Найдем: $f(8)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$, $f(-4)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$. Тогда $f(f(8))=f(f(-4))=$ $=-7\frac{25}{33}$.

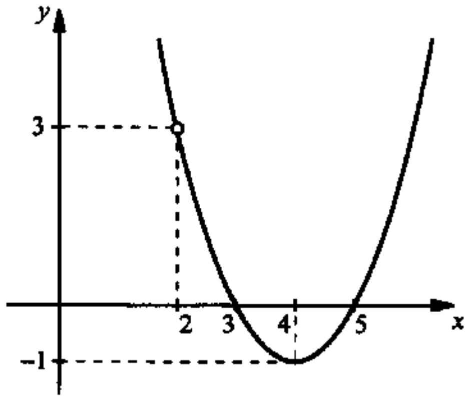
Ответ: $f(8)=f(-4)=-\frac{1}{8}$, $f(f(8))=f(f(-4))=-7\frac{25}{33}$.

5, а. Построим в одной системе координат графики функций $y_1=-x-2$ и $y_2=-x^2$ (пунктирные линии). Они пересекаются в точках $(-1;-1)$ и $(2;-4)$. При каждом значении x из значений функций y_1 и y_2 выбираем наибольшее значение. Получим график данной функции (сплошная линия).



Ответ: график построен.

5, б. Разложим числитель дроби на множители и сократим ее. Получим: $y=\frac{(x-3)(x-2)(x-5)}{x-2}=(x-3)(x-5)$. Таким образом, надо построить график функции $y=(x-3)(x-5)$ (парабола) при условии $x-2\neq 0$, т. е. $x\neq 2$.



Ответ: график построен.

Уроки 15–16. Зачетная работа по теме «Числовые функции»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

Работа составлена в двух равноценных вариантах. По сравнению с контрольной работой увеличено количество заданий. Соответственно, у учащихся появляется возможность выбора задач. Все задания разбиты на три части: А, В и С. Самые простые задачи находятся в части А, более сложные – в части В, еще сложнее – в части С. Каждая задача из части А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач части А можно получить 7 баллов, части В – 8 баллов и части С – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного урока можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}+\sqrt{9-x^2}$.

2. Определите область значений функции $f(x)=-2x^2+8x+3$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=2+\sqrt{25-x^2}$, ее наибольшее и наименьшее значения.

4. Определите четность или нечетность функции $f(x)=4x^5-$ $-7x^3+x\sqrt{x^2-4}+\dfrac{5x}{x^2-9}$.

5. Найдите значение функции $f(x)=\dfrac{2x^{-2}}{3-x^{-2}}-\dfrac{2x^{-2}}{3+x^{-2}}$ при $x=0{,}5^{-1}$.

6. Постройте график функции:

а) $y=\left|x^2-4x+3\right|$;

б) $y=\dfrac{9-x^2}{x-3}$.

В

7. Даны функции $f(x)=x^4-6x^2+9$ и $q(x)=(x^4-9)^2$. Найдите значение выражения $\dfrac{q(x)}{f(x)}-f(x)$ при $x=-0{,}3$.

8. Дана функция $f(x)=4x^2-x$. Решите уравнение $f(f(x))=33$.

9. Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x-1}{|x+2|-3}$;

б) $y=\begin{cases}x^2-4x+6, \text{ если } x\geq 1,\\ 3x, \text{ если } x<1.\end{cases}$

С

10. Найдите область значений функции $f(x)=\dfrac{x^2-4x+29}{x-2}$.

11. Дана функция $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+kx+m$, где коэффициенты a, b, c, d, k, m могут принимать значения 0 и 1. Найдите значения a, b, c, d, k, m, для которых $f(2)=42$.

12. Постройте график функции $y=1-\sqrt{5-x^2-4x}$.

Вариант 2

А

1. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\dfrac{x+1}{3-x}$.

2. Определите область значений функции $f(x)=3x^2-12x+1$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=3-\sqrt{4-x^2}$, ее наибольшее и наименьшее значения.

4. Определите четность или нечетность функции $f(x)=3x^6-2x^2+\sqrt{2x^2-1}+\dfrac{3x^2+1}{x^4-1}$.

5. Найдите значение функции $f(x)=\dfrac{2x^{-2}}{1-x^{-2}}+\dfrac{2x^{-2}}{1+x^{-2}}$ при $x=0{,}2^{-1}$.

6. Постройте график функции:

а) $y=x^2-4|x|+3$;

б) $y=\dfrac{25-x^2}{x+5}$.

В

7. Даны функции $f(x)=x-4x^2+4$ и $q(x)=(x^4-4)^2$. Найдите значение выражения $\dfrac{q(x)}{f(x)}-f(x)$ при $x=-0{,}7$.

8. Дана функция $f(x)=5x^2-x$. Решите уравнение $f(f(x))=76$.

9. Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x-2}{|x-1|-1}$;

б) $y=\begin{cases}x^2-2x+3, \text{ если } x\ge 1,\\ 2x, \text{ если } x<1.\end{cases}$

С

10. Найдите область значений функции $f(x)=\dfrac{x^2+10x+61}{x+5}$.

11. Дана функция $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+kx+m$, где коэффициенты a, b, c, d, k, m могут принимать значения 0 и 1. Найдите значения a, b, c, d, k, m, для которых $f(2)=40$.

12. Постройте график функции $y=\sqrt{6x-x^2-5}-1$.

IV. Ответы и решения

Вариант 1

1. $D(f) = [-3; 1) \cup (1; 3]$.

2. $E(f) = (-\infty; 11]$.

3. Функция возрастает на промежутке $[-5; 0]$ и убывает на промежутке $[0; 5]$, $f_{\text{наиб}} = f(0) = 7$, $f_{\text{наим}} = f(-5) = f(5) = 2$.

4. Функция нечетная.

5. $f(0{,}5^{-1}) = \dfrac{4}{143}$.

6. *а*, *б* построены.

7. 1,08.

8. $x_1 = 1$ и $x_2 = -\dfrac{3}{4}$.

9. *а*, *б* построены.

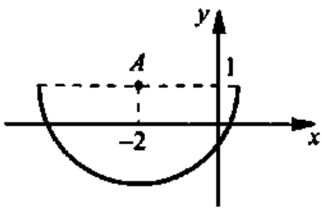
10. Разделим числитель дроби на знаменатель и выделим целую часть. Получим: $f(x) = \dfrac{x^2-4x+29}{x-2} = \dfrac{(x-2)^2+25}{x-2} = x-2+\dfrac{25}{x-2}$. Введем новую переменную $t = x - 2$ и запишем функцию в виде $f(t) = t + \dfrac{25}{t}$. Очевидно, что эта функция нечетная. Рассмотрим промежуток $t \in (0; +\infty)$ и напишем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического. Получим: $\dfrac{t+\dfrac{25}{t}}{2} \ge \sqrt{t \cdot \dfrac{25}{t}}$ или $t + \dfrac{25}{t} \ge 10$, т. е. $f(t) \ge 10$. Неравенство переходит в равенство при $t = \dfrac{25}{t}$, т. е. $t = 5$ (или $x - 2 = 5$, т. е. $x = 7$). При $t \in (-\infty; 0)$ имеем: $f(t) \le -10$. Неравенство переходит в равенство при $t = -5$ (или $x - 2 = -5$, т. е. $x = -3$). Итак, $E(f) = (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$.

Ответ: $E(f) = (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$.

11. Запишем значение данной функции $f(x)$ при $x = 2$: $a \cdot 2^5 + b \cdot 2^4 + c \cdot 2^3 + d \cdot 2^2 + k \cdot 2^1 + m$. Число 42 также запишем в двоичной системе счисления: $42 = 32 + 8 + 2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0$. Сравнивая две приведенные записи, находим: $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $k = 1$, $m = 0$.

Ответ: $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, $k = 1$, $m = 0$.

12. Данное выражение запишем в виде $1-y=\sqrt{5-x^2-4x}$. При этом $1 - y \geq 0$, т. е. $y \leq 1$. Возведем в квадрат обе части равенства: $(y-1)^2 = 5-x^2-4x$ или $x^2+4x-5+(y-1)^2=0$. Выделим полный квадрат по переменной x: $(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$. Получили уравнение окружности. С учетом ограничения $y \leq 1$ имеем нижнюю полуокружность с центром в точке $A(-2; 1)$ и радиуса $R = 3$.



Ответ: график построен.

Вариант 2

1. $D(f)=[-4; 3)\cup(3; 4]$.

2. $E(f) = [-11; +\infty)$.

3. Функция возрастает на промежутке [0; 2] и убывает на промежутке [–2; 0], $f_{наиб} = f(-2) = f(2) = 3$, $f_{наим} = f(0) = 1$.

4. Функция четная.

5. $f(0{,}2^{-1}) = \dfrac{25}{156}$.

6. *а*, *б* построены.

7. 3,92.

8. $x_1 = 1$ и $x_2 = -\dfrac{4}{5}$.

9. *а*, *б* построены.

10. Разделим числитель дроби на знаменатель и выделим целую часть. Получим: $f(x)=\dfrac{x^2+10x+61}{x+5}=\dfrac{(x+5)^2+36}{x+5}=x+5+\dfrac{36}{x+5}$. Введем новую переменную $t = x + 5$ и запишем функцию в виде $f(t)=t+\dfrac{36}{t}$. Очевидно, что эта функция нечетная. Рассмотрим промежуток $t\in(0; +\infty)$ и напишем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического. Получим: $\dfrac{t+\dfrac{36}{t}}{2}\geq\sqrt{t\cdot\dfrac{36}{t}}$

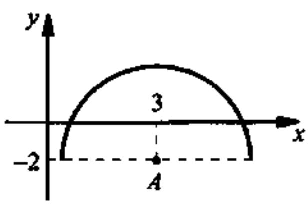
или $t+\frac{36}{t}\geq 12$, т. е. $f(t)\geq 12$. Неравенство переходит в равенство при $t=\frac{36}{t}$, т. е. $t=6$ (или $x+5=6$, т. е. $x=1$). При $t\in(-\infty;0)$ имеем: $f(t)\leq -12$. Неравенство переходит в равенство при $t=-6$ (или $x+5=$ $=-6$, т. е. $x=-11$). Итак, $E(f)=(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$.

Ответ: $E(f)=(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$.

11. Запишем значение данной функции $f(x)$ при $x=2$: $a\cdot 2^5+b\cdot 2^4+c\cdot 2^3+d\cdot 2^2+k\cdot 2^1+m$. Число 40 также запишем в двоичной системе счисления: $40=32+8=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+$ $+0\cdot 2^1+0$. Сравнивая две приведенные записи, находим: $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$, $k=0$, $m=0$.

Ответ: $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$, $k=0$, $m=0$.

12. Данное выражение запишем в виде $y+1=\sqrt{6x-x^2-5}$. При этом $y+1\geq 0$, т. е. $y\geq 1$. Возведем в квадрат обе части равенства: $(y+1)^2=6x-x^2-5$ или $x^2-6x+5+(y+1)^2=0$. Выделим полный квадрат по переменной x: $(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$. Получили уравнение окружности. С учетом ограничения $y\geq -1$ имеем верхнюю полуокружность с центром в точке $A(3;-1)$ и радиуса $R=2$.



Ответ: график построен.

Глава 2
Тригонометрические функции

Тригонометрия (главы 2–4) – один из *важнейших разделов* математики и используется при описании повторяющихся (периодических) процессов. Тригонометрия широко применяется в планиметрии и стереометрии, физике (волновые и колебательные процессы), астрономии, химии (некоторые типы реакций), биологии (кровообращение) и т. д.

Урок 17. Числовая окружность (обобщающее занятие)

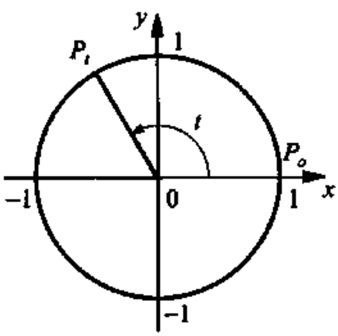
Цель: рассмотреть понятия, связанные с числовой окружностью.

Ход урока

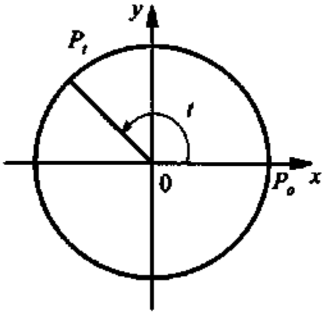
I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

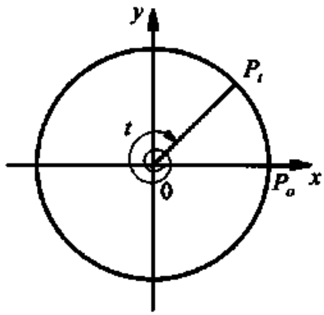
Обычно углы в геометрии рассматриваются при пересечении прямых в многоугольниках (в частности, в треугольниках). При этом рассматриваемые *углы* составляют *менее* 360°. В физике (для колебательных, волновых и других процессов) приходится учитывать углы и больше 360°. Поэтому возникает *понятие обобщенного угла.*



Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале координат, которую называют *числовой окружностью*. Возьмем точку P_0 (1; 0). Сместим эту точку по окружности и получим точку P_t. При этом смещение может происходить и по часовой стрелке, и против часовой стрелки на любую величину (как меньше одного оборота, как и больше одного оборота). Будем считать $\angle P_0OP_t$ *обобщенным углом* (*или* просто *углом*) t. Углы, полученные поворотом точки P_0 против часовой стрелки, считаются *положительными*, по часовой стрелке – *отрицательными*. Принято указывать направление поворота стрелкой, а в случае более одного оборота – число оборотов. Например, на рисунке показаны положительный (*а*) и отрицательный (*б*) углы.



а) $t = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$



б) $t = -675^\circ = -\frac{15\pi}{4}$

В тригонометрии величины углов, как правило, измеряются *в радианах* и значительно реже – в градусах. При этом за угол, равный 1 радиану (1 рад; слово «рад» обычно не пишут), принимают *центральный угол*, опирающийся *на дугу* окружности длиной, *равной радиусу* окружности; за угол, равный 1 градусу (1°), – *центральный угол*, опирающийся *на дугу* окружности длиной, *равной* $\frac{1}{360}$ *длины окружности*. Рассматривая единичную окружность, получаем, что ее длина равна 2π. Поэтому между радианной и градусной мерой существует простое соотношение: $2\pi = 360^\circ$ или $\pi = 180^\circ$. Тогда 1 (рад) $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx \left(\frac{180}{3{,}14}\right)^\circ \approx 57^\circ$ и $1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx$ $\approx \frac{3{,}14}{180^\circ} \approx 0{,}017$ (рад).

Пример 1

Запишем в других единицах измерения углы:

а) $t = \frac{5\pi}{6}$;

б) $t = -\frac{7\pi}{3}$;

в) $t = 210^\circ$;

г) $t = -405^\circ$.

Учтем, что 1 (рад) $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$. Тогда получим:

а) $\alpha = \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} \cdot \dfrac{180}{\pi} = 150^{\circ}$;

б) $\alpha = -\dfrac{7\pi}{3} = -\dfrac{7\pi}{3} \cdot \dfrac{180}{\pi} = -420^{\circ}$.

Учтем, что $1^{\circ} = \dfrac{\pi}{180}$ (рад). Тогда имеем:

в) $t = 210^{\circ} = 210 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{7\pi}{6}$ (рад);

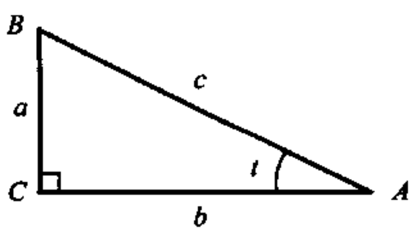
г) $t = -405^{\circ} = -405 \cdot \dfrac{\pi}{180} = -\dfrac{9\pi}{4}$ (рад).

В частности, на последнем рисунке приведены углы:

а) $t = 135^{\circ} = \dfrac{3\pi}{4}$; б) $t = -675^{\circ} = -\dfrac{15\pi}{4}$.

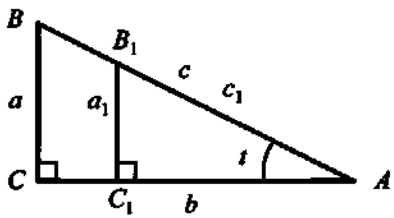
Заметим, что использование *радианной меры* углов обусловлено, в том числе, *более простой записью* ряда *формул*. Для окружности радиуса R длина l ее дуги в t радиан вычисляется по формуле $l = tR$. Если дуга содержит $n°$, то аналогичная формула имеет вид: $l = \dfrac{\pi R n}{180}$. Также площадь S сектора круга радиуса R, дуга которого содержит t радиан вычисляется по формуле $S = \dfrac{tR^2}{2}$. Если дуга содержит $n°$, то аналогичная формула имеет вид: $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$.

Теперь напомним определения основных тригонометрических функций, введенные в курсе геометрии.



Рассмотрим *прямоугольный треугольник ABC* с катетами a и b и гипотенузой c, с острым углом t. Тогда $\sin t = \dfrac{a}{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе); $\cos t = \frac{b}{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе); $\operatorname{tg} t = \frac{a}{b}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему катету); $\operatorname{ctg} t = \frac{b}{a}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему катету).

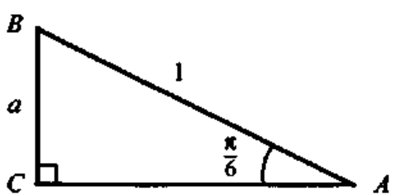
Для данного угла t отношения $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ *не зависят* от величин a, b и c.



Действительно, рассмотрим два подобных прямоугольных треугольника ABC и AB_1C_1 с общим острым углом t, катетами $BC = a$, $B_1C_1 = a_1$ и гипотенузами $AB = c$, $AB_1 = c_1$. По определению синуса из этих треугольников имеем: $\sin t = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ и $\sin t = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{a_1}{c_1}$. Но с другой стороны, из подобия треугольников получаем: $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$ или $\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$. Поэтому отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{a_1}{c_1}$ не зависят от величин a, c, a_1, c_1 и *зависят* только *от величины угла* t. Следовательно, $\sin t$ (как и остальные значения $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$) являются *функциями угла* t.

Пример 2

Найдем значения тригонометрических функций для $\frac{\pi}{6}$.



Так как тригонометрические функции угла не зависят от сторон треугольника, то рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 1$ и острым углом $A = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. В таком треугольнике $BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$. Тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь легко найти все тригонометрические функции: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AC} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$.

Для любого угла приближенные *значения* основных тригонометрических *функций* находятся *с помощью калькулятора или таблиц*. *Для некоторых углов* можно найти и *точные значения* тригонометрических *функций*, аналогично *примеру 2*. Эти значения приведены в таблице. Знак «–» в таблице означает, что данная функция при этом значении аргумента не определена (не существует).

Аргумент t	Функция			
	$\sin t$	$\cos t$	$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\, t$
$0^\circ = 0$	0	1	0	–
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	1	0	–	0

Заметим, что достаточно помнить значения только *первых трех строк* этой таблицы. Используя *свойства тригонометрических функций* и *формулы приведения* (см. следующие уроки), можно *находить значения тригонометрических функций и для других углов*, связанных с углами 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$.

Пример 3

Вычислим, используя данные приведенной таблицы:

а) $\operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30^\circ = 1^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 =$

$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1;$

б) $\dfrac{3\sin\frac{\pi}{6} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}}{5\operatorname{tg} 0 - 6\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 + \frac{1}{2}}{5\cdot 0 - 6\cdot 1} = \dfrac{0}{-6} = 0;$

в) $1 + \sin\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^3\frac{\pi}{6} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots =$

$= \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ (учтено, что слагаемые образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию).

Пример 4

Известно, что $\dfrac{\sin t + \cos t}{\sin t - 2\cos t} = 2.$

Найдем $A = \dfrac{3\sin^2 t - \sin t\cos t + \cos^2 t}{\sin^2 t + 2\cos^2 t}.$

Найдем связь между $\sin t$ и $\cos t$, используя условие задачи $\dfrac{\sin t + \cos t}{\sin t - 2\cos t} = 2$, или $\sin t + \cos t = 2\sin t - 4\cos t$, или $5\cos t = \sin t$.

Подставим $\sin t$ в выражение A: $A = \dfrac{3(5\cos t)^2 - (5\cos t)\cos t + \cos^2 t}{(5\cos t)^2 + 2\cos^2 t} =$

$= \dfrac{75\cos^2 t - 5\cos^2 t + \cos^2 t}{25\cos^2 t + 2\cos^2 t} = \dfrac{71\cos^2 t}{27\cos^2 t} = \dfrac{71}{27}.$

Заметим, что полученный ответ справедлив при $\cos t \neq 0$. Однако $\cos t$ не может равняться нулю, так как это противоречит условию задачи. Действительно, если $\cos t = 0$, то выражение $\dfrac{\sin t + \cos t}{\sin t - 2\cos t} = 2$ имеет вид: $\dfrac{\sin t + 0}{\sin t - 2\cdot 0} = 2$ или $1 = 2$. Так как это неравенство неверное, то $\cos t \neq 0$.

III. Контрольные вопросы

1. Как строится угол на числовой окружности?
2. Дайте определение 1 радиана и 1 градуса.
3. Какая связь между радианной и градусной мерами угла?
4. Дайте определение основных тригонометрических функций.

IV. Задание на уроке

§ 4, № 1; 3; 7; 12 (а, б); 13 (в, г); 14; 17; 19;
§ 5, № 1; 4; 6; 8; 10 (а, б); 11; 13.

V. Задание на дом

§ 4, № 2; 4; 9; 12 (в, г); 13 (а, б); 15; 18; 20;
§ 5, № 2; 5; 7; 9; 10 (в, г); 12; 14.

VI. Творческие задания

1. Вычислите:

а) $1+\cos\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\ldots;$

б) $1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+\ldots;$

в) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^4\frac{\pi}{6}+\sin^6\frac{\pi}{6}+\ldots;$

г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}^3\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}^5\frac{\pi}{3}+\ldots.$

Ответы: а) 2; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Известно, что $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{7}{8}$.

Найдите $\frac{3\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{5\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$.

Ответ: $\frac{22}{27}$.

3. Известно, что $\frac{\sin\alpha+5\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}=\frac{11}{8}$.

Найдите $\frac{2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha}$.

Ответ: $\frac{20}{17}$.

VII. Подведение итогов урока

Уроки 18–19. Тригонометрические функции (обобщающее занятие)

Цель: обобщить основные тригонометрические функции.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение функции синуса.
2. Дайте определение 1 радиана.
3. Запишите в других единицах измерения углы:

а) $225°$;

б) $-315°$;

в) $\frac{6\pi}{5}$;

г) $-\frac{2\pi}{3}$.

4. Найдите $\dfrac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Вариант 2

1. Дайте определение функции косинуса.
2. Дайте определение 1 градуса.
3. Запишите в других единицах измерения углы:

а) $165°$;

б) $-225°$;

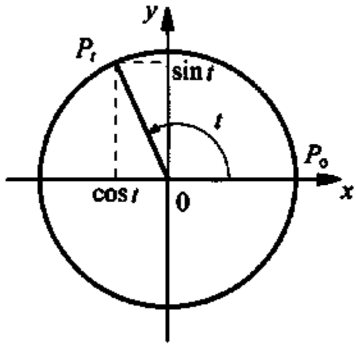
в) $\frac{5\pi}{6}$;

г) $-\frac{5\pi}{3}$.

4. Найдите $\dfrac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

III. Изучение нового материала

Известно, что значения тригонометрических функций не зависят от радиуса рассматриваемой окружности. Поэтому далее будет выбираться окружность единичного радиуса с центром в начале координат (числовая окружность). Пусть P_t числовой окружности получена при повороте точки P_0 (1; 0) на угол t. Тогда *ордината точки P_t – синус угла t, абсцисса точки P_t – косинус угла t*, т. е. $y = \sin t$ и $x = \cos t$.



Основной *особенностью и трудностью тригонометрии* является *значительное число формул*. Нередки случаи, при которых применение правильных формул не приводит к результату. Поэтому *недостаточно просто знать формулы*, необходимо научиться *их целесообразно и рационально использовать*. В связи с этим будем повторять *основные формулы* тригонометрии, *группируя их*. *Базовые формулы* (которые надо помнить) будем *нумеровать*, остальные формулы без труда выводятся.

Функции одного угла

Из определения тригонометрических функций сразу следуют *основные тригонометрические тождества*:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1; \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \left(t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in Z\right); \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad (t \neq \pi k, \text{ где } k \in Z); \qquad (3)$$

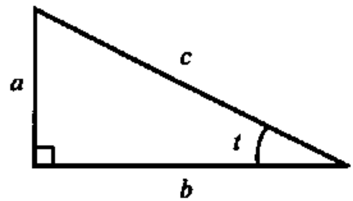
$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1 \quad \left(t \neq \frac{\pi}{2} k, \text{ где } k \in Z\right);$$

$$\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \left(t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in Z\right);$$

$$\operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t} \quad (t \neq \pi k, \text{ где } k \in Z).$$

Пример 1

Получим формулы (1), (2), четвертую и пятую.



Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. По определению имеем: $\sin t = \frac{a}{c}$ и $\cos t = \frac{b}{c}$. Найдем значение выражения $\sin^2 t + \cos^2 t$: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$ (была использована теорема Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$). Формула (1) получена.

По определению $\operatorname{tg} t = \frac{a}{b}$. Разделим числитель и знаменатель этой дроби на c и получим: $\operatorname{tg} t = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin t}{\cos t}$. Формула (2) доказана. Очевидно, что такая дробь существует, если $\cos t \neq 0$, т. е. $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$. Аналогично выводится и формула (3).

Учитывая формулы (2) и (3), получим: $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 1$. Формула существует, если $\sin t \neq 0$ и $\cos t \neq 0$, т. е. $t \neq \frac{\pi}{2} k$, где $k \in Z$. Четвертая формула доказана.

Учтем формулу (2) и получим: $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$ (была использована формула (1)). Формула имеет смысл при $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$. Пятая формула получена. Аналогично выводится и шестая формула.

Теперь рассмотрим *использование* приведенных формул. Прежде всего, эти формулы *по значению одной функции* угла t, позволяют *найти* все *остальные*.

Пример 2

Известно, что $\cos t = -\frac{7}{25}$ и $t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Найдем другие функции угла t.

Используя формулу (1), получим: $\sin^2 t + \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1$, откуда: $\sin^2 t = \frac{576}{625} = \left(\frac{24}{25}\right)^2$. Так как $t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ и в этой области $\sin t < 0$, то решение уравнения $\sin t = -\frac{24}{25}$. По формуле (2) находим $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-24/25}{-7/25} = \frac{24}{7}$ и по формуле (3) получим $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{-7/25}{-24/25} = \frac{7}{24}$. Итак, имеем: $\sin t = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} t = \frac{24}{7}$ и $\operatorname{ctg} t = \frac{7}{24}$.

Приведенные соотношения и формулы сокращенного умножения позволяют *доказывать простейшие тождества.*

Пример 3

Докажем, что $A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

Используя формулу суммы кубов и соотношение (1) получим:
$A = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cdot(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$= \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2 = 1.$

Тождество доказано.

Заметим, что в выражениях, содержащих *функции* tg α и ctg α, удобно (используя (2), (3)) *переходить к функциям* sin α и cos α.

Пример 4

Докажем тождество $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1 = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha}$.

Используя в левой части тождества формулу (2) и приведя дроби к общему знаменателю, разложим числитель дроби на множители и применим формулу (1), получим: $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1 =$

$$= \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1 = \frac{\sin^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha) + (\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^3\alpha)}{\cos^3\alpha} =$$

$$=\frac{\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos^3\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}.$$

Тождество доказано.

Пример 5

Упростим выражение $A=\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$.

В первой дроби заменив 1 по формуле (1), во второй дроби используя соотношение (2), получим: $A=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}+$

$$+\frac{\sin\alpha/\cos\alpha-1}{\sin\alpha/\cos\alpha+1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{0}{\sin\alpha+\cos\alpha}=0.$$

Итак, выражение $A = 0$.

С использованием приведенных формул по известным комбинациям тригонометрических функций с учетом формул сокращенного умножения могут быть найдены их *неизвестные комбинации*.

Пример 6

Найдем $|\sin\alpha+\cos\alpha|$, если $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|=C$.

Используя (2), (3), получим: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=C$, или $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=C$, или $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=C$, откуда $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{C}$. Тогда $|\sin\alpha+\cos\alpha|=$

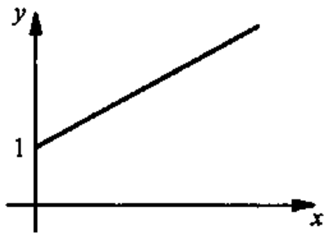
$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{2}{C}}=\sqrt{\frac{C+2}{C}}.$$

Пример 7

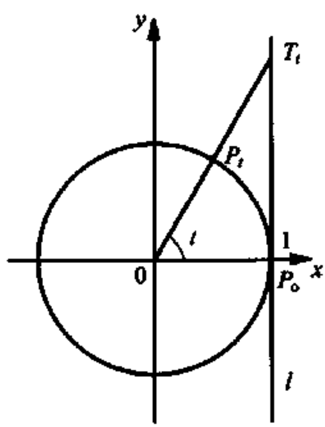
Построим график зависимости $y(x)$, если $\sqrt{x}=\operatorname{tg}\alpha$ и $\sqrt{y}=\frac{1}{\cos\alpha}$ при допустимых значениях α.

Чтобы найти зависимость $y(x)$, необходимо исключить угол α. Найдем $x = \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \geq 0$ и $y = \frac{1}{\cos^2\alpha} > 0$. Видно, что α можно исключить, найдя разность $y - x = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$, откуда $y - x = 1$ и $y = x + 1$. Теперь остается построить график линейной функции $y = x + 1$ (прямая линия) при условии $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

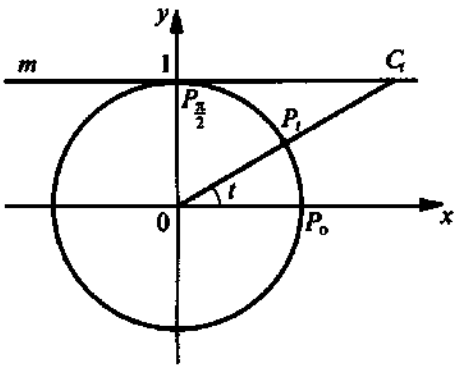


Детальнее рассмотрим две другие тригонометрические функции – *тангенс и котангенс*.

Проведем касательную l с уравнением $x = 1$ к единичной окружности. Рассмотрим точку P_t этой окружности и проведем прямую OP_t до пересечения с прямой l в точке T_t. Найдем ординату точки T_t. Прямая OP_t проходит через точки O (0; 0) и P_t ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$). Поэтому такая прямая имеет уравнение $y = x \cdot \operatorname{tg} t$. Абсцисса точки T_t равна 1, тогда ее ордината равна $\operatorname{tg} t$. Итак, *ордината точки пересечения прямых OP_t* и *l равна тангенсу t*. Поэтому прямую l называют *линией тангенсов*. При этом $\operatorname{tg} t$ имеет смысл для $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (где $k \in Z$), т. е. в случае пересечения прямых OP_t и l.



Аналогичным образом определяют и котангенс. Проведем касательную m с уравнением $y = 1$ к единичной окружности. Рассмотрим точку P_t этой окружности и проведем прямую OP_t до пересечения с прямой m в точке C_t. Можно показать, что *абсцисса точки пересечения прямых OP_t и m равна котангенсу t*. Поэтому прямую m называют *линией котангенсов*. При этом $\operatorname{ctg} t$ имеет смысл для $t \neq \pi k$ (где $k \in Z$), т. е. в случае пересечения прямых OP_t и m.



Пример 8

Докажем тождество $\dfrac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{ctg} t - \sin t \cos t} = 2\operatorname{tg}^2 t$.

Упростим левую часть тождества, используя формулы (1)–(3), и получим: $\dfrac{\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t - 1}{\dfrac{\cos t}{\sin t} - \sin t \cos t} = \dfrac{\sin t((\sin^2 t + \cos^2 t) + 2\sin t \cos t - 1)}{\cos t(1 - \sin^2 t)} =$

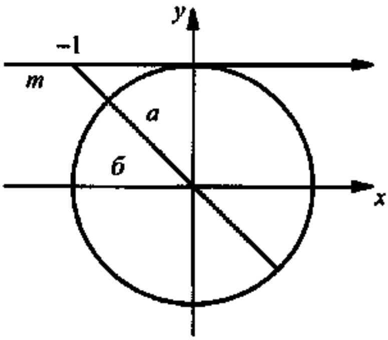
$= \dfrac{\sin t(1 + 2\sin t \cos t - 1)}{\cos t \cdot \cos^2 t} = \dfrac{\sin t 2\sin t \cos t}{\cos t \cos^2 t} = 2\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 2\operatorname{tg}^2 t$. Таким образом, тождество доказано.

Пример 9

Найдем все функции t, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2 t + 7\operatorname{ctg} t + 3 = 0$ и: а) $\dfrac{3\pi}{2} < t < \dfrac{7\pi}{4}$; б) $\dfrac{7\pi}{4} < t < 2\pi$.

Сначала найдем функцию $\operatorname{ctg} t$. Для этого введем новую переменную $z = \operatorname{ctg} t$ и получим по условию задачи квадратное уравнение $2z^2 + 7z + 3 = 0$. Корни этого уравнения $z_1 = -3$ и $z_2 = -\dfrac{1}{2}$. Тогда

$(\text{ctg}\, t)_1 = -3$ и $(\text{ctg}\, t)_2 = -\frac{1}{2}$. Построим числовую окружность и угол $t = \frac{7\pi}{4}$.



а) Если $\frac{3\pi}{2} < t < \frac{7\pi}{4}$, то угол t попадает в сектор a и $-1 < \text{ctg}\, t < 0$. Тогда подходит значение $\text{ctg}\, t = -\frac{1}{2}$. Легко найти функцию $\text{tg}\, t = \frac{1}{\text{ctg}\, t} = -2$. Найдем все оставшиеся функции. Для этого равенство $\text{ctg}\, t = -\frac{1}{2}$ возведем в квадрат и получим: $\text{ctg}^2 t = \frac{1}{4}$, или $\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}$, или $\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}$, или $4 - 4\sin^2 t = \sin^2 t$, откуда $\sin^2 t = \frac{4}{5}$. Так как в секторе a функция $\sin t > 0$, $\cos t < 0$, то найдем $\sin t = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\cos t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

б) если $\frac{7\pi}{4} < t < 2\pi$, то угол t попадает в сектор $б$ и $-\infty < \text{ctg}\, t < -1$. Значит, подходит значение $\text{ctg}\, t = -3$. Найдем функцию $\text{tg}\, t = -\frac{1}{3}$. Далее действуем по аналогии с пунктом a: $\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} = 9$, откуда $\sin^2 t = \frac{1}{10}$, $\sin t = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\cos t = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Пример 10

Найдем наибольшее значение функции $f(t)=\dfrac{1}{\sin^4 t+\cos^4 t}$. При каких значениях t оно достигается?

Используя формулы (1)–(2), запишем функцию в виде $f(t)=\dfrac{1}{\sin^4 t+\cos^4 t}=\dfrac{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2}{\sin^4 t+\cos^4 t}=\dfrac{\sin^4 t+2\sin^2 t\cos^2+\cos^4 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}$. Разделим числитель и знаменатель этой дроби на $\cos^4 t$: $f(t)=\dfrac{\operatorname{tg}^4 t+2\operatorname{tg}^2 t+1}{\operatorname{tg}^4 t+1}=\dfrac{(\operatorname{tg}^4 t+1)+2\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^4 t+1}=1+\dfrac{2\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^4 t+1}$. Запишем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $a=\operatorname{tg}^4 t$ и $b=1$. $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (равенство достигается при $a=b$). Получим $\dfrac{\operatorname{tg}^4 t+1}{2}\geq\sqrt{\operatorname{tg}^4 t\cdot 1}$ или $\dfrac{\operatorname{tg}^4 t+1}{2}\geq\operatorname{tg}^2 t$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число $\dfrac{2}{\operatorname{tg}^4 t+1}$ и получим неравенство того же знака $1\geq\dfrac{2\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^4 t+1}$. Поэтому значение функции $f(t)\leq 1+1=2$, т. е. $f_{наиб}(t)=2$. Это значение достигается при условии $\operatorname{tg}^4 t=1$ или $\operatorname{tg} t=\pm 1$. Решения этих уравнений $t=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in Z$.

В заключение заметим, что приведенные в § 6–8 учебника многочисленные таблицы и формулы запоминать *не нужно*. Таблицы малоинформативны, формулы связаны с формулами приведения (и будут рассмотрены на следующем уроке) или с периодичностью тригонометрических функций (будут изучены при построении графиков функций).

IV. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)

1. Используя числовую окружность, дайте определение: а) $\sin t$; б) $\cos t$; в) $\operatorname{tg} t$; г) $\operatorname{ctg} t$.

2. Приведите основные формулы (1)–(3).

V. Задание на уроках

§ 6, № 1; 3; 6 (а, б); 9 (в, г); 10 (а); 12 (в, г); 13 (а); 14 (а, б); 15 (б); 18 (в); 24 (б); 29 (а); 32 (г); 34 (а, в); 38 (а); 41 (а, б);

§ 7, № 2 (а, б); 5 (а); 6 (в, г); 9 (а, в); 11 (а, б); 16 (а); 20 (а, б);

§ 8, № 1; 3; 7; 10; 12 (а); 13; 15.

VI. Задание на дом

§ 6, № 2; 4; 6 (в, г); 9 (а, б); 10 (г); 12 (а, б); 13 (б); 14 (в, г); 15 (г); 18 (г); 24 (г); 29 (б); 32 (б); 34 (б, г); 38 (б); 41 (в, г);

§ 7, № 2 (в, г); 5 (б); 6 (а, б); 9 (б, г); 11 (в, г); 16 (б); 20 (в, г);

§ 8, № 2; 4; 8; 11; 12 (б); 14; 16.

VII. Подведение итогов уроков

Урок 20. Формулы приведения

Цель: рассмотреть формулы приведения и их применение.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Используя числовую окружность, дайте определение $\cos t$.

2. Решите неравенство $\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Постройте график уравнения $\operatorname{tg}(y+x)=1$.

Вариант 2

1. Используя числовую окружность, дайте определение $\sin t$.

2. Решите неравенство $\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{1}{2}$.

3. Постройте график уравнения $\operatorname{ctg}(y-x)=1$.

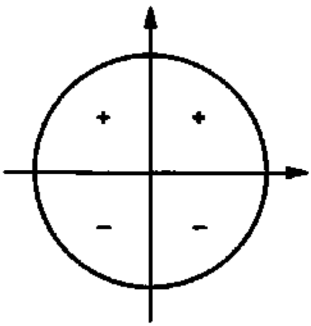
III. Изучение нового материала

Выражения $\sin(\pi-t)$, $\cos(270°+t)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ и т. д. можно записать проще: sit t, $\sin t$, $\operatorname{ctg} t$ соответственно. Для этого используют *формулы приведения*. По сути, это не формулы, а определенный *алгоритм преобразований*.

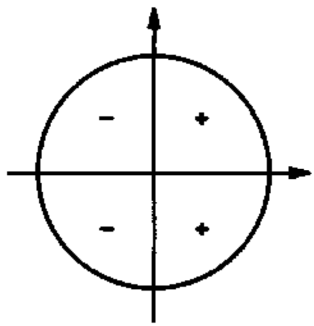
При преобразовании тригонометрической функции $f\left(\frac{\pi}{2}n\pm t\right)$, где $n\in Z$, надо знать следующее.

1) Если n – *четное число*, то преобразуемая *функция не меняется*. Если n – *нечетное число*, то преобразуемая *функция меняется на кофункцию* (*сопряженную функцию*). *Аргументом* преобразованной функции будет t. Заметим, что кофункциями являются пары функций: синус и косинус; тангенс и котангенс.

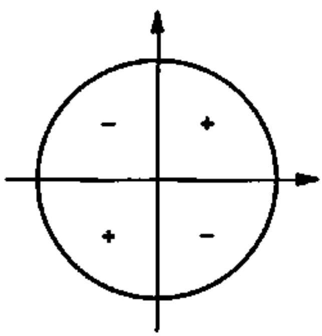
2) *Знак преобразованной функции совпадает со знаком исходной функции* при условии, что угол t острый, т. е. $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (хотя реально он может быть любым). Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям представлены на рисунке.



Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса

Пример 1

Упростим выражение $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

Так как функция котангенса имеет аргумент $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ и число $n = 3$ нечетное, то функция котангенса меняется на кофункцию –

тангенс. В предположении, что угол α острый, получим, что угол $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ лежит в IV четверти. В этой четверти знак котангенса отрицательный. В I четверти (угол α острый) все тригонометрические функции положительны (в том числе и тангенс). Поэтому перед тангенсом необходимо поставить знак «минус». В итоге имеем: $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Пользуясь этим алгоритмом (формулами приведения), рассмотрим еще ряд задач.

Пример 2

Упростим следующие выражения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; б) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha$; в) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$;

г) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; д) $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$; е) $\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$.

Пример 3

Приведем к тригонометрической функции угла из промежутка $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ или (0°; 90°):

а) $\sin 1{,}6\pi=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+0{,}1\pi\right)=-\cos 0{,}1\pi$;

б) $\cos 2{,}3\pi=\cos\left(\frac{4\pi}{2}+0{,}3\pi\right)=\cos 0{,}3\pi$;

в) $\operatorname{tg}278^\circ=\operatorname{tg}(3\cdot 90^\circ+8^\circ)=-\operatorname{ctg}8^\circ$;

г) $\cos 304^\circ=\cos(3\cdot 90^\circ+34^\circ)=\sin 34^\circ$.

Пример 4

Упростим выражение:

а) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=(-\cos x)^2+(-\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x=1$;

б) $$\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\operatorname{tg}\alpha}{-\cos\alpha}\cdot\frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

IV. Контрольный вопрос (фронтальный опрос)

На примерах поясните формулы приведения.

V. Задание на уроке

§ 9, № 1; 3; 5 (а, б); 6 (в, г); 7 (а, б); 8 (а); 9 (в, г); 10 (а); 11 (б); 12 (а, в); 13 (а); 14 (б).

VI. Задание на дом

§ 9, № 2; 4; 5 (в, г); 6 (а, б); 7 (в, г); 8 (б); 9 (а, б); 10 (б); 11 (а); 12 (б, г); 13 (б); 14 (а).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 21–23. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$, их свойства и графики (обобщающее занятие)

Цели: детальнее рассмотреть функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$, их свойства и графики; обсудить периодичность этих функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Вычислите $\sin^2\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^2(6\pi+\alpha)$.

2. Упростите выражение:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\alpha+5\cos(6\pi+\alpha)$;

б) $\dfrac{\cos(\pi+\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Вариант 2

1. Вычислите $\cos^2\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^2(5\pi+\alpha)$.

2. Упростите выражение:

а) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-3\sin\alpha+4\sin(3\pi-\alpha)$;

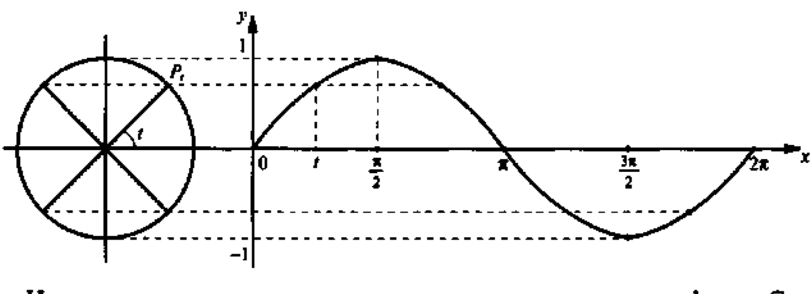
б) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right).$

III. Изучение нового материала

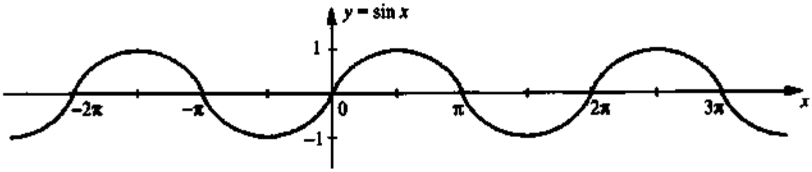
Из ранее изученного нам известны многие свойства двух основных тригонометрических функций – синуса и косинуса. Рассмотрим графики этих функций и на их основе детализируем такие свойства.

1. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график

Обсудим построение *графиков функций синуса и косинуса*. Сначала построим *график функции синуса* на отрезке $[0; 2\pi]$. Отметим на оси ординат точки $(0; -1)$ и $(0; 1)$, на оси абсцисс – точку $(2\pi; 0)$. Разделим отрезок $[0; 2\pi]$ и единичную окружность на 8 равных частей (учтите, что длина отрезка $[0; 2\pi]$ равна $2\pi \approx 6{,}28$). Каждая такая часть равна $\dfrac{\pi}{4}$. Для построения точки графика с абсциссой t используем определение синуса. Отметим точку P_t на единичной окружности и проведем через P_t прямую, параллельную оси абсцисс. Точка пересечения этой прямой и прямой $x = t$ искомая, так как ее ордината совпадает с ординатой точки P_t и по определению $\sin t$ равен ординате точки P_t.



На рисунке приведено построение восьми точек графика. Соединяя их плавной кривой, получаем эскиз графика синуса на отрезке $[0; 2\pi]$. Для построения графика функции вне этого отрезка учтем *периодичность функции синуса*, т. е. $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ (где n – произвольное целое число). Поэтому во всех точках $x_0+2\pi n$ (где $0 \le x_0 \le 2\pi$) значения синуса совпадают. Следовательно, график синуса на всей прямой получается из построенного графика с помощью параллельных переносов его вдоль оси абсцисс (вправо и влево) на 2π, 4π, 6π и т. д. *График функции синуса* называется *синусоидой*. Отрезок $[-1; 1]$ оси ординат, с помощью которого находили значения синуса, иногда называют *линией синусов*.



Используя построенный график, приведем *основные свойства* функции $y = \sin x$:

1. *Область определения* $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Функция *нечетная* (т. е. $y(-x) = -y(x)$), и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Функция *возрастает* на отрезках вида $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k; \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ и убывает на отрезках вида $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k; \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, где $k \in Z$.

4. Функция *ограничена*, т. е. $-1 \le y(x) \le 1$.

5. *Наименьшее* значение функции $y_{наим} = -1$ (достигается в точках вида $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$) и наибольшее значение $y_{наиб} = 1$ (достигается в точках вида $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$).

6. Функция *непрерывная*.

7. *Область значений* $E(y) = [-1; 1]$.

8. Функция *периодическая* с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$, т. е. $y(x + 2\pi k) = y(x)$.

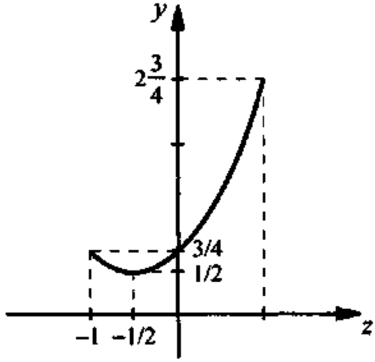
Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = 3\sin x - 1$; б) $y = \dfrac{7}{4} - \cos^2 x + \sin x$.

а) В силу ограниченности функции $y = \sin x$ имеем неравенство $-1 \le \sin x \le 1$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 3 и получим неравенство того же знака $-3 \le 3\sin x \le 3$. Вычтем их всех частей число 1: $-4 \le 3\sin x - 1 \le 2$. Таким образом, $y_{наим} = -4$ и $y_{наиб} = 2$.

б) Используем основное тригонометрическое тождество (1) и в данной функции перейдем к величине $\sin x$. Получим: $y = \dfrac{7}{4} - (1 - \sin^2 x) + \sin x = \sin^2 x + \sin x + \dfrac{3}{4}$. Введем вспомогательную величину $z = \sin x$, причем $-1 \le z \le 1$. Тогда необходимо найти наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции $y(z) = z^2 + z + \dfrac{3}{4}$ на отрезке $[-1; 1]$.

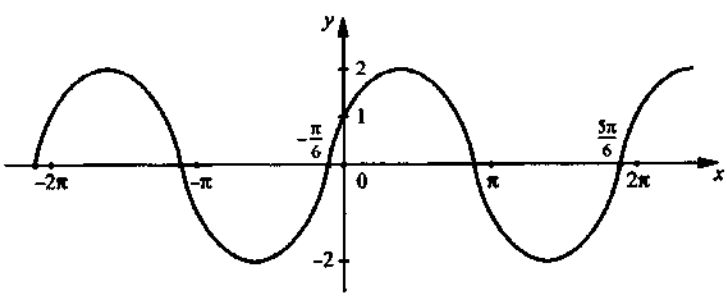


Графиком этой функции является парабола, направленная ветвями вверх (см. рисунок), вершина которой имеет координаты $z_в = -\dfrac{1}{2}$ и $y_в = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$. В этой точке функция имеет наименьшее значение. Наибольшее значение функция имеет в точке $z = 1$, и оно равно $y = 2\dfrac{3}{4}$. Итак, получили: $\dfrac{1}{2} \le y \le 2\dfrac{3}{4}$. Поэтому $y_{наим} = \dfrac{1}{2}$ и $y_{наиб} = 2\dfrac{3}{4}$.

Пример 2

Построим график функции $y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

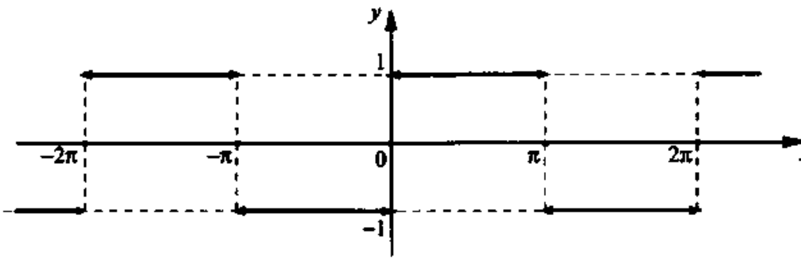
Такой график получается из графика функции $y = x$ смещением на $\dfrac{\pi}{6}$ влево вдоль оси абсцисс и растяжением в 2 раза вдоль оси ординат.



Пример 3

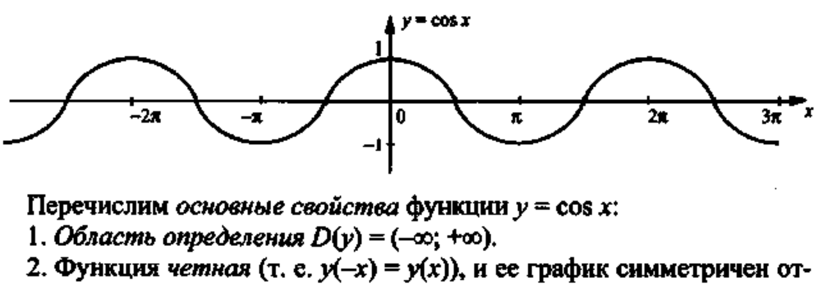
Построим график функции $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

Раскроем знак модуля и получим $y = \begin{cases} 1, \text{ если } \sin x > 0, \\ -1, \text{ если } \sin x < 0. \end{cases}$ При $\sin x = 0$ (т. е. $x = \pi n$, где n – любое целое число) данная функция не определена.



2. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график

Для построения графика функции *косинуса* учтем формулу приведения $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Поэтому значение косинуса в любой точке x_0 равно значению синуса в точке $x_0 + \dfrac{\pi}{2}$. Тогда график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на $\dfrac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому график функции $y = \cos x$ также является синусоидой.



Перечислим *основные свойства* функции $y = \cos x$:

1. *Область определения* $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Функция *четная* (т. е. $y(-x) = y(x)$), и ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Функция *возрастает* на отрезках вида $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$ и *убывает* на отрезках вида $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, где $k \in Z$.

4. Функция *ограничена*, т. е. $-1 \le y(x) \le 1$.

5. *Наименьшее* значение функции $y_{наим} = -1$ (достигается в точках вида $x = \pi + 2\pi k$) и наибольшее значение $y_{наиб} = 1$ (достигается в точках вида $x = 2\pi k$).

6. Функция *непрерывная*.

7. *Область значений* $E(y) = [-1; 1]$.

8. Функция *периодическая* с наименьшим положительным периодом $T = 2\pi$, т. е. $y(x + 2\pi k) = y(x)$.

Рассмотрим наиболее типичные примеры.

Пример 4

Найдем область определения и область значений функции:

а) $y = 3\sin|x|$;

б) $y = -2\cos\sqrt{x^2 - 2x}$;

в) $y = 5\sin\frac{1}{x}$;

г) $y = -4\cos\frac{\pi x}{1 + x^2}$.

а) Для данной функции x может принимать любые значения, поэтому $D(y) = R$. Теперь найдем область значений функции. Так как $-1 \le \sin|x| \le 1$, то умножим все члены этого неравенства на 3 и получим $-3 \le 3\sin|x| \le 3$ или $-3 \le y \le 3$, т. е. $E(y) = [-3; 3]$.

б) Аргумент данной функции существует при условии $x^2 - 2x \ge 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$, что и является областью определения функции $y(x)$. Итак, $D(y) = (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$. При изменении x в этих пределах величина $z = \sqrt{x^2 - 2x}$ меняется от 0 до ∞. Поэтому $-1 \le \cos z \le 1$, тогда $2 \ge -2\cos z \ge -2$, или $-2 \le -2\cos\sqrt{x^2 - 2x} \le 2$, или $-2 \le y \le 2$, т. е. $E(y) = [-2; 2]$.

в) Аргумент этой функции существует при условии $x \ne 0$ и $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. При изменении x в таких пределах величина $z = \frac{1}{x}$ изменяется в промежутках $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Тогда $-1 \le \sin z \le 1$ или $-5 \le 5\sin z \le 5$, т. е. $-5 \le 5\sin\frac{1}{z} \le 5$ или $-5 \le y \le 5$. Поэтому $E(y) = [-5; 5]$.

г) Промежуточный аргумент $Z = \frac{\pi x}{1 + x^2}$ этой функции определен при всех значениях x, поэтому $D(y) = R$. Найдем промежуток, в котором меняется z. Запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел – 1 и x^2. Получим: $\frac{1+x^2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot x^2}$ или $\frac{1+x^2}{2} \geq |x|$. Разделим обе части неравенства на положительное выражение $1 + x^2$ (при этом знак неравенства сохраняется) $\frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{1+x^2}$, откуда $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$. При изменении z в указанных пределах, как видно из единичной окружности, $0 \leq \cos z \leq 1$. Тогда $0 \geq -4\cos z \geq -4$ или $-4 \leq y \leq 0$. Поэтому $E(y) = [-4; 0]$.

Заметим, что во всех пунктах *а* – *г* рассматривались *сложные функции*. Для того чтобы *найти значение* тригонометрической *функции*, необходимо было *сначала найти значение промежуточного аргумента*. Этот аргумент, в свою очередь, являлся функцией аргумента x. В пункте *а* промежуточным аргументом была функция $z = |x|$, в пункте *б* – $z = \sqrt{x^2 - 2x}$, в пункте *в* – $z = \frac{1}{x}$ и в пункте *г* – $z = \frac{\pi x}{1+x^2}$.

Пример 5

Установим четность или нечетность функции:

а) $y(x) = 3\sin x \cos x$;

б) $y(x) = 2\sin|x| + 3\cos x$;

в) $y(x) = 3\sin x \cos^2 x + 1$;

г) $y(x) = \frac{\cos x}{x-2}$.

Для функций *а* – *в* область определения $D(y) = R$ – симметричное множество. Для этих функций найдем $y(-x)$.

а) $y(-x) = 3\sin(-x)\cos(-x) = 3(-\sin x)\cos x = -3\sin x \cos x = -y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то данная функция по определению нечетная.

б) $y(-x) = 2\sin|-x| + 3\cos(-x) = 2\sin|x| + 3\cos x = y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = y(x)$, то данная функция по определению четная.

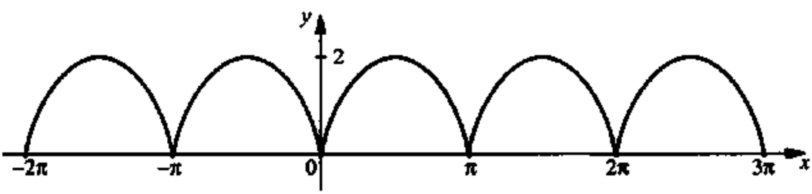
в) $y(-x)=3\sin(-x)\cos^2(-x)+1=3(-\sin x)\cos^2 x+1=-3\sin x\cos^2 x+1.$ Видно, что равенство $y(-x)=-y(x)$ не выполняется, так как перед числом 1 один и тот же знак «плюс». Равенство $y(-x)=y(x)$ также не выполняется, так как знаки перед первыми слагаемыми в этих функциях противоположны. Поэтому данная функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. определенной четности не имеет.

г) Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;\infty)$ не является симметричной, так как точка $x=-2$ входит в эту область, а симметричная точка $x=-(-2)=2$ не входит. Поэтому данная функция определенной четности не имеет.

Пример 6

Построим график функции $y=\sqrt{4-4\cos 2x}$.

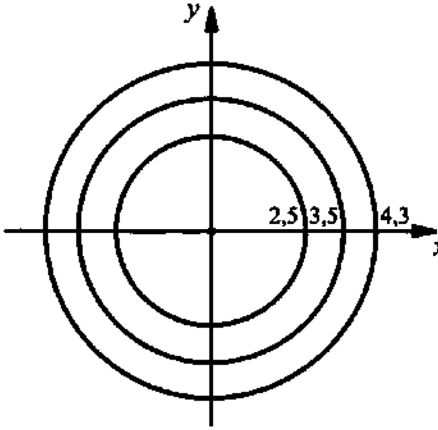
Учтем формулу понижения степени и запишем данную функцию в виде $y=\sqrt{4(1-\cos^2 x)}=\sqrt{2^2\cdot\sin^2 x}=2|\sin x|$. Теперь построим график $y=2|\sin x|$. Если $\sin x\geq 0$, то строим график функции $y=2\sin x$. Если $\sin x<0$, то строим график функции $y=-2\sin x$. Он получается отражением вверх относительно оси абсцисс частей графика $y=2\sin x$ при $\sin x<0$.



Пример 7

Построим график уравнения $\cos(x^2+y^2)=1$.

Так как выполнено равенство $\cos(x^2+y^2)=1$, то аргумент косинуса $x^2+y^2=2\pi n$, где n – 0, 1, 2, 3, … . При $n=0$ получаем уравнение $x^2+y^2=0$, которое имеет единственное решение $x=y=0$ (начало координат). При $n\in N$ получаем уравнение окружности $x^2+y^2=2\pi n$ с центром в начале координат и радиуса $R=\sqrt{2\pi n}$. Для различных натуральных n получаем семейство концентрических окружностей, радиусы которых $R\sim\sqrt{n}$, т. е. $R_1=\sqrt{2\pi}\approx 2,5$, $R_2=\sqrt{4\pi}\approx 3,5$, $R_3=\sqrt{6\pi}\approx 4,3$ и т. д. Итак, графиком данного уравнения являются начало координат и семейство концентрических окружностей.



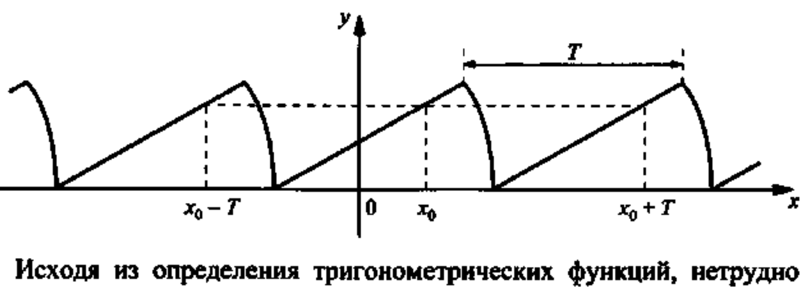
3. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

Перейдем к следующему *свойству* функции – *периодичности.* Многие реальные явления и процессы имеют *повторяющийся* (*периодический*) *характер.* Например, минутная стрелка занимает одинаковое положение на циферблате часов через каждый час. Такого типа *процессы* называют *периодическими*, как и их *функции.*

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T (T – некоторое действительное число, отличное от нуля), если:

1) для любого x из области определения функции значение аргумента $x \pm T$ также принадлежит области определения функции;

2) выполняется равенство $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$. Обычно под периодом функции понимают наименьший из всех положительных периодов (основной период функции).



Исходя из определения тригонометрических функций, нетрудно установить, что *период функций* $\sin x$ и $\cos x$ составляет 2π, период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ – π. Действительно, функции синуса и косинуса определены на всей числовой оси, $\sin(x+2\pi)=\sin x$ и $\cos(x+2\pi)=\cos x$ для любого x. Аналогично области определения функций тангенса и котангенса включают как точку x, так и точки $x \pm \pi$. При этом выполняются равенства $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$.

Пример 8

Докажем, что если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то при любом целом $n \neq 0$ число nT также период этой функции.

Пусть для определенности $n = 4$. Тогда нужно доказать, что число $4T$ является также периодом функции $f(x)$. Найдем $f(x+4T)=$ $=f((x+3T)+T)=f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f((x+T)+T)=$ $=f(x+T)=f(x)$. Итак, было показано, что для любого x выполнено равенство $f(x+4T)=f(x)$. Поэтому по определению число $4T$ является также периодом функции $f(x)$.

Пример 9

Найдем период функции $y=A\sin(kx+\varphi)$.

Предположим, что эта функция периодическая с основным периодом T. Тогда должно выполняться равенство $A\sin(k(x+T)+\varphi)=$ $=A\sin(kx+\varphi)$. Поэтому получим уравнение $k(x+T)+\varphi=kx+\varphi+2\pi n$ или $kT=2\pi n$, откуда $T=\dfrac{2\pi n}{k}$. Учитывая, что число T – основной период данной функции, найдем $T=\dfrac{2\pi}{|k|}$.

Аналогично можно показать, что для функции $y=a\cos(kx+\varphi)$ основной период также $T=\dfrac{2\pi}{|k|}$, для функций $y=A\operatorname{tg}(kx+\varphi)$ и $y=A\operatorname{ctg}(kx+\varphi)$ основной период $T=\dfrac{\pi}{|k|}$. Это обязательно надо помнить.

Отметим, что сумма, разность, произведение и частное двух периодических функций могут быть как периодической, так и непериодической функцией. В частности, алгебраическая сумма периодических функций будет функцией периодической, если периоды этих функций соизмеримы (т. е. если их отношение – число рациональное).

Пример 10

Найдем период функции $f(x)=\cos 2x+3\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{4}{5}x+1\right)+7.$

Функция $f(x)$ является алгебраической суммой трех периодических функций, периоды которых, соответственно, π, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$. Представим эти числа в виде дробей с одинаковыми знаменателями $\frac{12\pi}{12}$, $\frac{8\pi}{12}$, $\frac{15\pi}{12}$. Видим, что эти числа соизмеримы и их общей мерой является число $\frac{\pi}{12}$. Для определения периода $f(x)$ найдем наименьшее общее кратное чисел 12, 8 и 15, которое равно 120. Поэтому $T=120\frac{\pi}{12}=10\pi$.

Отметим также, что сложная функция, промежуточным аргументом которой служит периодическая функция, есть функция периодическая.

Например, $f(x)=\frac{1}{3}\sin^3\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$, $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+6\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}+1\right)}{\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+3}$ – функции периодические.

Пример 11

Докажем, что функция $f(x)=3\sin 2x-5\sin\sqrt{3}x+\operatorname{tg}\sqrt{5}x$ непериодическая.

Функция $f(x)$ является суммой трех периодических функций, периоды которых, равны соответственно π, $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$, $\frac{\pi}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\pi}{5}$.

Коэффициенты 1, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$, стоящие перед π, являются *несоизмеримыми* числами. Числа $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{5}$ иррациональные и могут быть представлены в виде десятичных *бесконечных непериодических* дробей. Поэтому нельзя сказать, в какое *рациональное* число раз такие числа различаются. Следовательно, данная функция непериодическая.

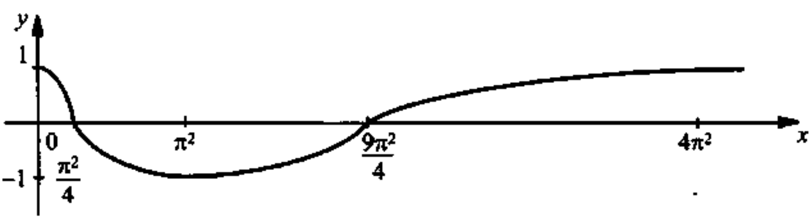
Определение периодической функции может быть использовано для доказательства непериодичности функций.

Пример 12

Докажем, что функция $f(x) = \cos\sqrt{x}$ непериодическая.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что функция периодическая с периодом T. Тогда должно выполняться равенство $\cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x}$. Поэтому имеем уравнение $\sqrt{x+T} = \sqrt{x} + 2\pi n$. Возведем обе части в квадрат: $x + T = x + 4\pi n\sqrt{x} + 4\pi^2 n^2$ и найдем $T = 4\pi n(\sqrt{x} + \pi n)$. Видим, что величина T *не является числом* и зависит от точки x. Имеется противоречие, и данная функция не является периодической.

В этом легко убедиться, построив график функции. Ее область определения $D(f) = [0; +\infty)$, область значений $E(f) = [-1; 1]$. Проследим за точками пересечения графика функции с осью абсцисс. Они определяются условием $\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ (где n = 0, 1, 2, ...), откуда $x = \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)^2$. Посчитаем несколько первых таких точек: $x_0 = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 \approx 2{,}46$, $x_1 = \left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2 \approx 22{,}14$, $x_2 = \left(\dfrac{5\pi}{2}\right)^2 \approx 61{,}5$ и т. д. Видим, что расстояние между соседними точками с увеличением x возрастает. На рисунке приведен график (с нарушением масштаба).



IV. Контрольные вопросы

1. Основные свойства и график функции $y = \sin x$.
2. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график.
3. Как получить график функции $y = \cos x$, используя график функции $y = \sin x$?
4. Определение периодической функции.
5. Основной период функции.

6. Основной период функций $y = A\sin(kx+\varphi)$ и $y = A\cos(kx+\varphi)$.

7. Основной период функций $y = A\operatorname{tg}(kx+\varphi)$ и $y = A\operatorname{ctg}(kx+\varphi)$.

V. Задание на уроках

§ 10, № 2 (а, б); 3 (в, г); 5 (а, б); 9 (а); 10 (б); 11 (а, б); 12 (а); 13 (б); 14 (а, б); 15; 16 (а); 17;

§ 11, № 3 (а); 8 (б); 11 (а, б); 12 (в, г); 13 (а);

§ 12, № 1; 3; 7 (а, б); 9 (в, г).

VI. Задание на дом

§ 10, № 2 (в, г); 3 (а, б); 5 (в, г); 9 (б); 10 (а); 11 (в, г); 12 (б); 13 (а); 14 (в, г); 16 (б); 18;

§ 11, № 3 (б); 8 (г); 11 (в, г); 12 (а, б); 13 (б);

§ 13, № 2; 4; 7 (в, г); 9 (а, б).

VII. Творческое задание

Постройте график функции, уравнения или неравенства:

1) $y = \sin(-x)$;
2) $y = \sin x + \sin(-x)$;
3) $y = \sqrt{1-\sin^2(-x)}$;
4) $y = |\sin x|$;
5) $y = \sin|x|$;
6) $|y| = \sin x$;
7) $y = \sin x - \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$;
8) $|y - \sin x| \le 1$;
9) $|x| - 2 = \sin y$;
10) $\sin(|x|+|y|) = 0$;
11) $y \ge \sin x$;
12) $|y| < \sin x$;
13) $y > |\sin x|$;
14) $y = \cos(-x)$;
15) $y = \cos x + \cos(-x)$;
16) $y = \sqrt{1-\cos^2(-x)}$;
17) $y = |\cos x|$;
18) $y = \cos|x|$;
19) $|y| = \cos x$;
20) $y = \cos x + \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$;
21) $|y + \cos x| \ge 2$;
22) $|x| - 3 = \cos y$;
23) $\cos(|x| - 2|y|) = -1$;
24) $y \le \cos x$;
25) $|y| > \cos x$;
26) $y < |\cos x|$.

VIII. Подведение итогов уроков

Урок 24. Преобразования графиков тригонометрических функций

Цель: рассмотреть наиболее распространенные преобразования графиков тригонометрических функций.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Основные свойства и график функции $y = \sin x$.

2. Найдите основной период функции:

а) $y = 5\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

б) $y = 7\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(5x + \dfrac{\pi}{8}\right)$.

3. Постройте график функции $y = \cos x + \dfrac{|x|}{x}$.

Вариант 2

1. Основные свойства и график функции $y = \cos x$.

2. Найдите основной период функции:

а) $y = 3\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{5}\right)$;

б) $y = 8\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{8}\right) - 5\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Постройте график функции $y = \sin x - \dfrac{x}{|x|}$.

III. Изучение нового материала

Все преобразования графиков функций, изложенные подробно в главе 1, являются *универсальными* – они пригодны для *всех* функций, в том числе и тригонометрических. Поэтому рекомендуем *повторить* эту тему. Здесь же ограничимся кратким напоминанием *основных преобразований* графиков.

1. Для построения графика функции $y = f(x) + b$ надо перенести график функции на $|b|$ единиц вдоль оси ординат – вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

2. Для построения графика функции $y = mf(x)$ (где $m > 0$) надо растянуть график функции $y = f(x)$ в m раз вдоль оси ординат. Причем для $m > 1$ происходит действительно растяжение в m раз, для $0 < m < 1$ – сжатие в $\frac{1}{m}$ раз.

3. Для построения графика функции $y = f(x + a)$ надо перенести график функции на $|a|$ единиц вдоль оси абсцисс – вправо при $a < 0$ и влево при $a > 0$.

4. Для построения графика функции $y = f(kx)$ (где $k > 0$) надо сжать график функции $y = f(x)$ в k раз вдоль оси абсцисс. Причем для $k > 1$ происходит действительно сжатие в k раз, для $0 < k < 1$ – растяжение в $\frac{1}{k}$ раз.

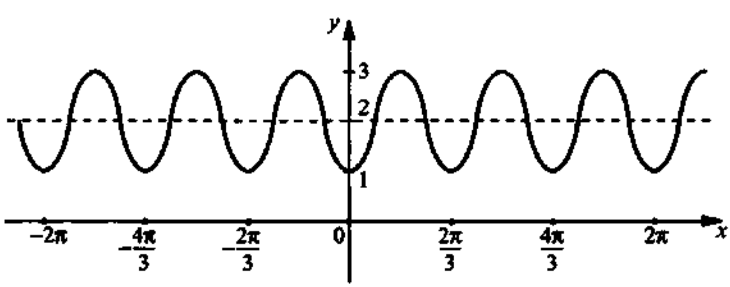
5. Для построения графика функции $y = -f(x)$ надо график функции $y = f(x)$ отразить относительно оси абсцисс (это преобразование – частный случай преобразования 2 для $m = -1$).

6. Для построения графика функции $y = f(-x)$ надо график функции $y = f(x)$ отразить относительно оси ординат (это преобразование – частный случай преобразования 4 для $k = -1$).

Пример 1

Построим график функции $y = -\cos 3x + 2$.

В соответствии с правилом 5 надо график функции $y = \cos x$ отразить относительно оси абсцисс. По правилу 3 этот график надо сжать в три раза вдоль оси абсцисс. Наконец, такой график по правилу 1 надо поднять вверх на три единицы вдоль оси ординат.



Полезно также напомнить *правила преобразования* графиков *с модулями*.

1. Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо сохранить часть графика функции $y = f(x)$, для которой $y \geq 0$. Ту часть графика $y = f(x)$, для которой $y < 0$, надо симметрично отразить вверх относительно оси абсцисс.

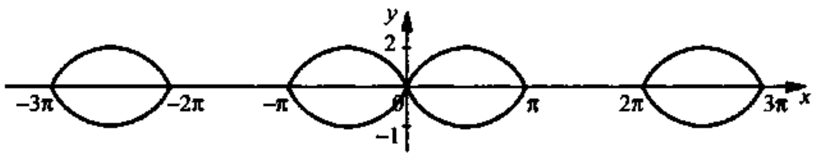
2. Для построения графика функции $y = f(|x|)$ надо сохранить часть графика функции $y = f(x)$, для которой $x \geq 0$. Кроме того, эту часть надо симметрично отразить влево относительно оси ординат.

3. Для построения графика уравнения $|y| = f(x)$ надо сохранить часть графика функции $y = f(x)$, для которой $y \geq 0$. Кроме того, эту часть надо симметрично отразить вниз относительно оси абсцисс.

Пример 2

Построим график уравнения $|y| = \sin|x|$.

Построим график функции $y = \sin x$ для $x \geq 0$. Этот график по правилу 2 отразим влево относительно оси ординат. Сохраним части такого графика, для которых $y \geq 0$. По правилу 3 эти части симметрично отразим вниз относительно оси абсцисс.



В более сложных случаях знаки модуля необходимо раскрывать.

Пример 3

Построим график сложной функции $y = \cos(2x + |x|)$.

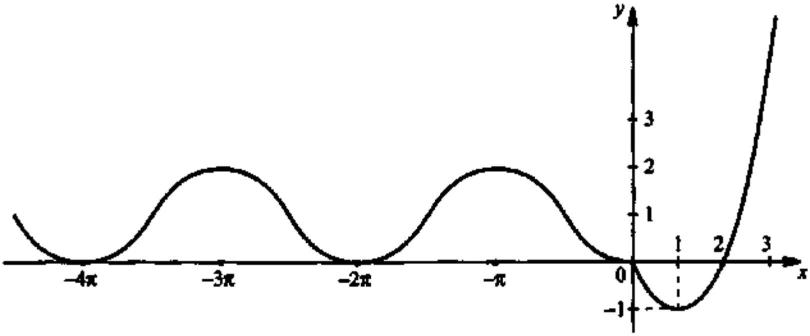
Напомним, что аргумент функции косинуса представляет собой функцию переменной x, и поэтому данная функция является сложной. Раскроем знак модуля и получим: $y = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x < 0, \\ \cos 3x, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ Для двух таких промежутков построим график функции $y(x)$. Учтем, что при $x \geq 0$ график функции $y = \cos 3x$ получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием в 3 раза вдоль оси абсцисс.

Пример 4

Построим график функции $y = \begin{cases} 1-\cos x, \text{ если } x<0, \\ x^2-2x, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

Используя формулу квадрата разности, запишем функцию в виде $y = \begin{cases} 1-\cos x, \text{ если } x<0, \\ (x-1)^2-1, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ График функции состоит из двух частей.

При $x > 0$ надо построить график функции $y = 1 - \cos x$. Он получается из графика функции $y = \cos x$ отражением относительно оси абсцисс и смещением на 1 единицу вверх вдоль оси ординат.



При $x \geq 0$ строим график функции $y = (x-1)^2 - 1$. Он получается из графика функции $y = x^2$ смещением на 1 единицу вправо вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат.

IV. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)

1. Правила преобразований графиков функций.
2. Преобразования графиков с модулями.

V. Задание на уроке

§ 13, № 2 (а, б); 3; 5; 7 (в, г); 8 (а, б); 9 (а); 10 (б); 11 (а, б); 13 (в, г); 14; 17 (а, б); 19 (б); 20 (а, в).

VI. Задание на дом

§ 13, № 2 (в, г); 4; 6; 7 (а, б); 8 (в, г); 9 (б); 10 (а); 11 (в, г); 13 (а, б); 15; 17 (в, г); 19 (а); 20 (б, г).

VII. Творческое задание

Постройте график функции, уравнения, неравенства:

1) $y = \left|\sin - \frac{1}{2}\right|$; 2) $y = \left|\cos - \frac{1}{2}\right|$; 3) $y = |\sin(-3x)|$;

4) $y = |\cos 2|x||$; 5) $|y| = \sin(-3x)$; 6) $|y| = \cos 2|x|$;

7) $|y-\sin 3x|\le 1$; 8) $|y+\cos 2x|\le 3$; 9) $|y-\cos(-2x)|>1$;
10) $|y+\sin(-2x)|>2$; 11) $x=\sin 3y$; 12) $x=\cos 2y-1$;
13) $x=|\sin 3y|$; 14) $|x|=\cos 2y$; 15) $|x|=\sin|3y|$;
16) $x=\left|\cos 2y-\frac{1}{2}\right|$; 17) $|x|=\cos 2y-\frac{1}{2}$; 18) $|x|=\left|\sin 3y+\frac{1}{2}\right|$.

VIII. Подведение итогов урока

Уроки 25–26. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики

Цель: рассмотреть графики и свойства функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Как построить график функции:
а) $y = mf(x)$;
б) $y = |f(x)|$?
2. Постройте график функции:
а) $y = 3\sin x$;
б) $y=\left|\cos 3x+\frac{1}{2}\right|$.

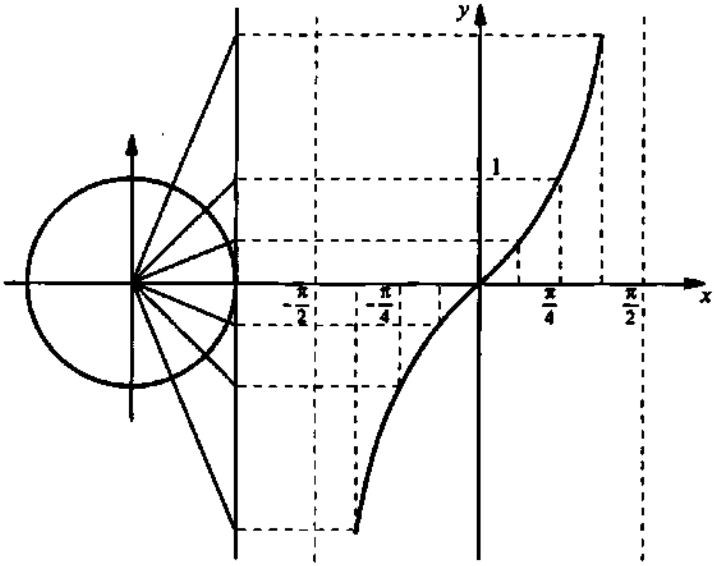
Вариант 2

1. Как построить график функции:
а) $y = f(kx)$;
б) $y = f(|x|)$?
2. Постройте график функции:
а) $y = 2\cos 3x$;
б) $y=\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|$.

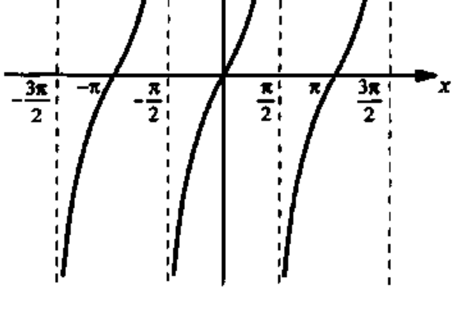
III. Изучение нового материала

Рассмотрим две оставшиеся тригонометрические функции – тангенс и котангенс.

1. Функция $y = \operatorname{tg} x$



Остановимся на *графиках* функций *тангенса* и *котангенса*. Сначала обсудим построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Такое построение аналогично построению графика функции $y = \sin x$, описанному ранее. При этом значение функции тангенса в точке находится с помощью линии тангенсов (см. рисунок).



Учитывая периодичность функции тангенса, получаем ее график на всей области определения параллельными переносами вдоль оси абсцисс (вправо и влево) уже построенного графика на π, 2π и т. д. График функции тангенса называют тангенсоидой.

Приведем *основные свойства* функции $y = \operatorname{tg} x$:

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

2. Функция *нечетная* (т. е. $y(-x) = -y(x)$), и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Функция *возрастает* на промежутках вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k \in Z$.

4. Функция *не ограничена.*

5. Функция *не имеет* наименьшего и наибольшего значений.

6. Функция *непрерывная.*

7. *Область значений* $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

8. Функция *периодическая* с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т. е. $y(x + \pi k) = y(x)$.

9. График функции имеет *вертикальные асимптоты* $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Пример 1

Установим четность или нечетность функции:

а) $y(x) = 3\operatorname{tg}^4 2x - 2\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} + 5\cos x$;

б) $y(x) = 2\operatorname{tg}^3 4x + 3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \sin x$;

в) $y(x) = \frac{7\cos x}{\operatorname{tg}^3 x + 1}$.

Легко проверить, что для функций а, б область определения – симметричное множество. Исследуем эти функции на четность или нечетность. Для этого найдем $y(-x)$ и сравним значения $y(x)$ и $y(-x)$.

а) Получим: $y(-x) = 3\operatorname{tg}^4(-2x) - 2\operatorname{tg}^2\left(-\frac{x}{3}\right) + 5\cos(-x) = 3(-\operatorname{tg} 2x)^4 -$

$-2\left(-\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right)^2+5\cos x=3\operatorname{tg}^4 2x-2\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}+5\cos x.$ Так как выполнено равенство $y(-x)=y(x)$, то функция $y(x)$ по определению четная.

б) Имеем: $y(-x)=2\operatorname{tg}^3(-4x)+3\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)-\sin(-x)=2(-\operatorname{tg}4x)^3-$ $-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sin x=-2\operatorname{tg}^3 4x-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sin x=-\left(2\operatorname{tg}^3 4x+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sin x\right)=-y(x).$

Так как выполнено равенство $y(-x)=-y(x)$, то функция $y(x)$ по определению нечетная.

в) Область определения данной функции – несимметричное множество. Например, функция определена в точке $x=\frac{\pi}{4}$ и не определена в симметричной точке $x=-\frac{\pi}{4}$. Поэтому данная функция определенной четности не имеет.

Пример 2

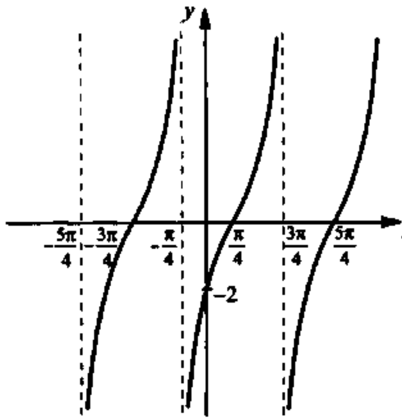
Найдем основной период функции $y(x)=7\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\sin 3x-5\cos 2x.$

Данная функция $y(x)$ представляет собой алгебраическую сумму трех тригонометрических функций, периоды которых равны: $T_1=2\pi$, $T_2=\frac{2\pi}{3}$, $T_3=\pi$. Запишем эти числа в виде дробей с одинаковыми знаменателями $T_1=\frac{6\pi}{3}, T_2=\frac{2\pi}{3}, T_3=\frac{3\pi}{3}$. Наименьшее общее кратное коэффициентов НОК (6; 2; 3). Поэтому основной период данной функции $T=\frac{6\pi}{3}=2\pi.$

Пример 3

Построим график функции $y=2\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

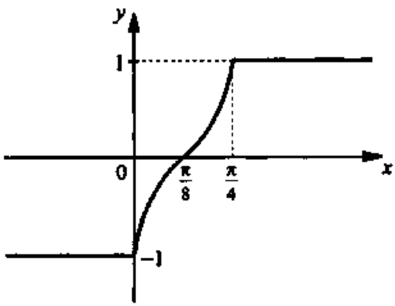
Учтем правила преобразования графиков функции. В соответствии с ними график функции $y=2\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ получается смещением графика функции $y=\operatorname{tg}x$ на $\frac{\pi}{4}$ единиц вправо вдоль оси абсцисс и его растяжением в 2 раза вдоль оси ординат.



Пример 4

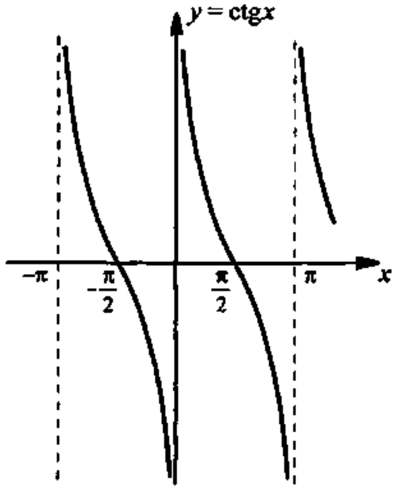
Построим график функции $y = \operatorname{tg}\left(|x| - \left|x - \frac{\pi}{4}\right|\right)$.

Используя определение и свойства модуля, в аргументе функции раскроем знаки модуля, рассмотрев три случая. Если $x < 0$, то имеем: $y = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. При $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ имеем: $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Для $x > \frac{\pi}{4}$ имеем: $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Далее остается построить три части данного графика. При $x < 0$ строим прямую $y = -1$. Для $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ строим тангенсоиду $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Этот график получается смещением графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на $\frac{\pi}{8}$ вправо вдоль оси абсцисс и сжатием в два раза вдоль этой оси. При $x > \frac{\pi}{4}$ строим прямую $y = 1$.



2. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Аналогично графику функции $y = \operatorname{tg} x$ или с помощью формулы приведения $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ строится график функции $y = \operatorname{ctg} x$.



Перечислим *основные свойства* функции $y = \operatorname{ctg} x$:

1. *Область определения* – множество всех действительных чисел, за исключением чисел вида $x = \pi k$, $k \in Z$.

2. Функция *нечетная* (т. е. $y(-x) = -y(x)$), и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Функция *убывает* на промежутках вида $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

4. Функция *не ограничена*.

5. Функция *не имеет* наименьшего и наибольшего значений.

6. Функция *непрерывная*.

7. *Область значений* $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

8. Функция *периодическая* с наименьшим положительным периодом $T = \pi$, т. е. $y(x + \pi k) = y(x)$.

9. График функции имеет *вертикальные асимптоты* $x = \pi k$.

Пример 5

Найдем область определения и область значений функции $y = 2\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 5$.

Очевидно, что область определения функции $y(x)$ совпадает с областью определения функции $z = \operatorname{ctg} x$, т. е. область определения –

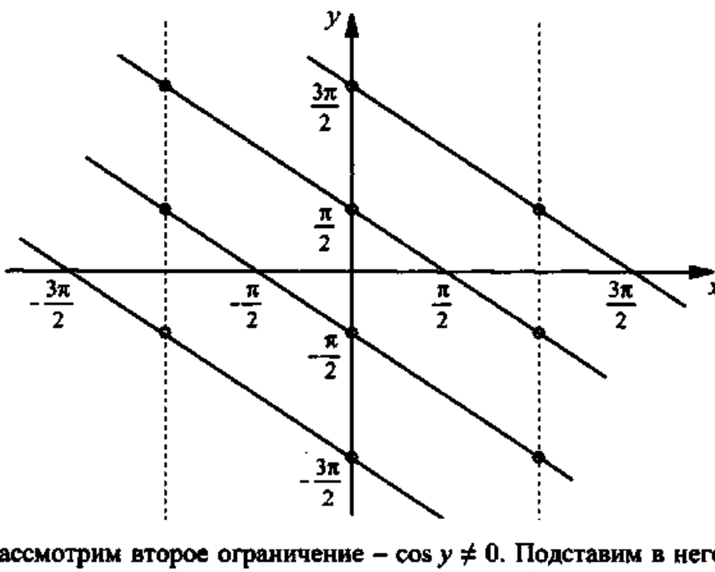
множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \pi k,\ k \in Z$.

Функция $y(x)$ сложная. Поэтому запишем ее в виде $y(z) = 2z^2 - 4z + 5$, где $z = \operatorname{ctg} x$ и $z \in (-\infty; +\infty)$. Координаты вершины параболы $y(z)$: $z_в = 1$ и $y_в = 2 - 4 + 5 = 3$. Тогда область значений данной функции $E(y) = [3; +\infty)$.

Пример 6

Построим график уравнения $\dfrac{\operatorname{ctg}(x+y)}{\sin x \cos y} = 0$.

Из формы записи уравнения следует, что $\operatorname{ctg}(x + y) = 0$ и $\sin x \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Из уравнения $\operatorname{ctg}(x + y) = 0$ находим $x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ (где $k \in Z$) и $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k - x$. Построим семейство этих прямых. Теперь учтем ограничение $\sin x \neq 0$, откуда $x \neq \pi m$ (где $m \in Z$). Удалим эти точки из построенных прямых (пустые точки).

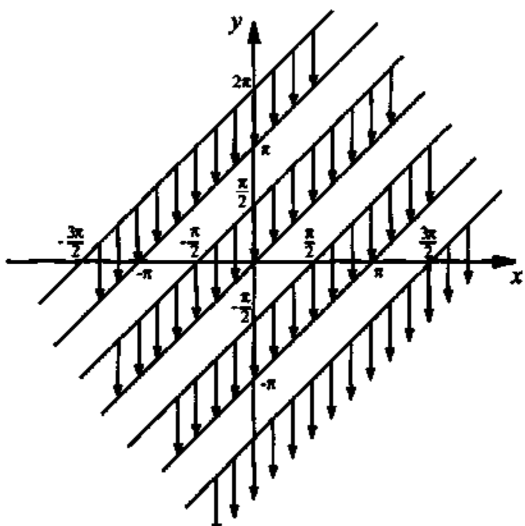


Рассмотрим второе ограничение – $\cos y \neq 0$. Подставим в него величину $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k - x$ и получим: $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k - x\right) \neq 0$ или по формуле приведения $\sin x \neq 0$. Таким образом, второе ограничение свелось к первому (уже учтенному).

Пример 7

Построим множество точек, для которых выполнено неравенство $\operatorname{ctg}(y - x) \geq 0$.

Прежде всего решим данное неравенство. Функция котангенса принимает неотрицательные значения для углов, расположенных в первой четверти, т. е. $0 < y - x \leq \frac{\pi}{2}$. Учитывая периодичность функции котангенса, получим: $\pi k < y - x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$. Ко всем частям этого двойного неравенства прибавим x и найдем $x + \pi k < y \leq x + \frac{\pi}{2} + \pi k$. На координатной плоскости изобразим множество таких точек (показаны штриховкой). Стрелки указывают, что такие точки решением не являются.



IV. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)

1. Основные свойства и график функции $y = \operatorname{tg} x$.
2. Функция $y = \operatorname{ctg} x$, ее свойства и график.

V. Задание на уроках

§ 14, № 1; 3 (а, б); 5; 6 (в, г); 7 (а, в); 8; 10 (а, б); 11; 13 (а); 14 (б); 15 (а).

VI. Задание на дом

§ 14, № 2; 3 (в, г); 4; 6 (а, б); 7 (б, г); 9; 10 (в, г); 12; 13 (б); 14 (а); 15 (б).

VII. Творческие задания

1. Определите четность или нечетность функции:

а) $y(x)=3\sin x+2\operatorname{tg}^3 4x+3x$; д) $y(x)=3x+\cos 2x-\operatorname{ctg}^2 x$;

б) $y(x)=2\sin^3 x-4\operatorname{ctg}2x+x^5$; е) $y(x)=x^3-\sin^2 2x+3\operatorname{tg}^4 x$;

в) $y(x)=2x^4+\cos 3x-\operatorname{tg}^2 x$; ж) $y(x)=\dfrac{x^4+1}{\operatorname{tg}x-1}$;

г) $y(x)=3x^2-\sin^4 x+7$; з) $y(x)=\dfrac{2x^3-1}{\operatorname{ctg}x+1}$.

Ответы: а, б) нечетные; в, г) четные; д–з) определенной четности не имеют.

2. Постройте график функции, уравнения или неравенства:

а) $y=\operatorname{tg}(-x)$; ж) $y=\operatorname{ctg}(-x)$; н) $y=\operatorname{tg}(x+\pi)$;

б) $y=\operatorname{ctg}(x-2\pi)$; з) $y\ge|\operatorname{tg}x|$; о) $y\le|\operatorname{ctg}x|$;

в) $y=\operatorname{tg}|x|$; и) $y=\operatorname{ctg}|x|$; п) $|y|\le\operatorname{tg}x$;

г) $|y|\ge\operatorname{ctg}x$; к) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y$; р) $\operatorname{ctg}y=\operatorname{ctg}x$;

д) $\operatorname{tg}x=1$; л) $\operatorname{ctg}y=-1$; с) $\operatorname{tg}(y-2x)=0$;

е) $\operatorname{ctg}\pi(x+y)=1$; м) $\operatorname{tg}\pi(|x|-y)=-\sqrt{3}$; т) $\operatorname{ctg}\pi(|x|+|y|)=-1$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 27–28. Контрольная работа по теме «Тригонометрические функции»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Дана функция $y=3-2\sin x$. Найдите для нее:

а) область определения;

б) область значений.

2. Для функции $y=-5\cos 4x$ определите:

а) четность или нечетность (ответ обоснуйте);

б) наименьший положительный период.

3. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $|y| = \sin x - \frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Дана функция $y = 5 - 4\cos x$. Найдите для нее:

а) область определения;

б) область значений.

2. Для функции $y = 2\sin 3x$ определите:

а) четность или нечетность (ответ обоснуйте);

б) наименьший положительный период.

3. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $|y| = \cos x - \frac{1}{2}$.

Вариант 3

1. Определите четность или нечетность функции $y = x^2 \sin 2x + x^3 \cos 6x$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = \sin^2 x + 6\sin x - 1$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 2\sin x + 3\cos 2x - 1$.

4. Найдите минимальное и максимальное значения функции $y = 4\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 3\operatorname{ctg}|x|$;

б) $\sin(2y + x) = 1$.

Вариант 4

1. Определите четность или нечетность функции $y = x^2 \cos 3x - x\sin 5x$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = \cos^2 x - 4\cos x + 5$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 3\cos x - 4\sin 2x + 1$.

4. Найдите минимальное и максимальное значения функции $y = \operatorname{tg} x + 9\operatorname{ctg} x$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 2\operatorname{tg}|x|$;

б) $\cos(2y - x) = -1$.

Вариант 5

1. Определите четность или нечетность функции $y = 3x\cos 4x + x^3\operatorname{tg}|2x|$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = 3\operatorname{tg} 2x + 12\operatorname{ctg} 2x$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 3\operatorname{tg} 2x - \sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{5}\cos 3x$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2\sin x - 3\cos^2 x + 1$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 2\operatorname{tg}(x + |x|)$;

б) $\sin(|x| + 2|y|) = 0$.

Вариант 6

1. Определите четность или нечетность функции $y = 2x^3\sin|x| + x|\operatorname{ctg} x|$ (ответ обоснуйте).

2. Найдите область определения и область значений функции $y = 9\operatorname{tg} 3x + 4\operatorname{ctg} 3x$.

3. Определите наименьший положительный период функции $y = 2\operatorname{ctg} 3x - \sqrt{7}\cos x - 2\sqrt{3}\sin 2x$.

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3\cos x + 2\sin^2 x - 1$.

5. Постройте график функции и уравнения:

а) $y = 3\cos(x + |x|)$;

б) $\operatorname{tg}(2|x| + |y|) = 0$.

Урок 29. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. а) $D(y) = R$; б) $E(y) = [1; 5]$.

2. а) Функция четная; б) $\frac{\pi}{2}$.

3. а) Функция возрастающая; б) график симметричен относительно оси абсцисс.

Вариант 2

1. а) $D(y) = R$; б) $E(y) = [1; 9]$.

2. а) Функция нечетная; б) $\frac{2\pi}{3}$.

3. а) Функция убывающая; б) график симметричен относительно оси абсцисс.

Вариант 3

1. Нечетная.
2. $D(y) = R$, $E(y) = [-6; 6]$.
3. 2π.
4. $y_{min} = 4$, $y_{max} = -4$.
5. а) График симметричен относительно оси ординат; б) семейство прямых $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

Вариант 4

1. Четная.
2. $D(y) = R$, $E(y) = [2; 10]$.
3. 2π.
4. $y_{min} = 6$, $y_{max} = -6$.
5. а) График симметричен относительно оси ординат; б) семейство прямых $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

Вариант 5

1. Найдем $y(-x) = 3(-x)\cos(-4x) + (-x)^3 \operatorname{tg}|-2x| = -3x\cos 4x - x^3 \operatorname{tg}|2x| = -(3x\cos 4x + x^3 \operatorname{tg}|2x|) = -y(x)$. Было учтено, что функция косинуса четная и $|-2x| = |2x|$. Так как $y(-x) = -y(x)$, то функция $y(x)$ нечетная по определению.

Ответ: нечетная.

2. Область определения задается условием, что функции $\operatorname{tg} 2x$ и $\operatorname{ctg} 2x$ определены. Поэтому $2x \neq \frac{\pi}{2}k$ $(k \in Z)$ и $x \neq \frac{\pi}{4}k$. Функция $y(x)$ нечетная. Для $\operatorname{tg} 2x > 0$ и $\operatorname{ctg} 2x > 0$ запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{3\operatorname{tg}2x + 12\operatorname{ctg}2x}{2} \geq \sqrt{3\operatorname{tg}2x \cdot 12\operatorname{ctg}2x} = 6$. Тогда $y(x) \in (-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$.

Таким образом, $D(y)$ – все x, кроме $x = \frac{\pi}{4}k$ $(k \in Z)$, и $E(y) = (-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$.

Ответ: $D(y)$ – все x, кроме $x = \frac{\pi}{4}k$ $(k \in Z)$; $E(y) = (-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$.

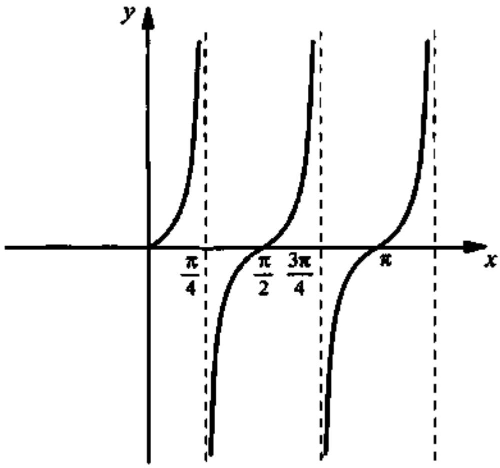
3. Найдем периоды функций, входящих в функцию $y(x)$. Получим: для функции $\operatorname{tg}2x$ – $T_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$, для функции $\sin x$ – $T_2 = 2\pi = \frac{12\pi}{6}$, для функции $\cos 3x$ – $T_3 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}$. НОК $(T_1, T_2, T_3) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$. Поэтому период функции $y(x)$ равен $T = 2\pi$.

Ответ: 2π.

4. Запишем данную функцию в виде $y = 2\sin x - 3(1 - \sin^2 x) + 1 = 3\sin^2 x + 2\sin x - 2$. Обозначим $t = \sin x$ (где $-1 \leq t \leq 1$) и получим: $y = 3t^2 + 2t - 2$. Наименьшее значение функции достигается при $t = -\frac{1}{3}$ и равно $y_{\text{наим}} = 3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - 2 = -2\frac{1}{3}$, наибольшее значение достигается при $t = 1$ и равно $y_{\text{наиб}} = 3 + 2 - 2 = 3$.

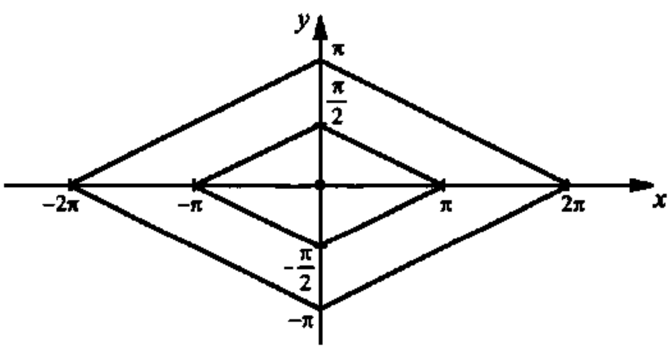
Ответ: $y_{\text{наим}} = -2\frac{1}{3}$, $y_{\text{наиб}} = 3$.

5, а. Для данной функции раскроем знак модуля и получим: $y = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 2\operatorname{tg} 2x, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ Построим график этой функции. Учтем, что график функции $y = 2\operatorname{tg} 2x$ получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ растяжением в два раза вдоль оси ординат и сжатием в два раза вдоль оси абсцисс.



Ответ: см. график.

5, б. Выпишем решения уравнения $\sin(|x|+2|y|)=0$ и получим: $|x|+2|y|=\pi n$ (где $n\in Z$ и $n\geq 0$). При $n=0$ получим: $x=y=0$ (начало координат), при $n=1$ имеем график уравнения $|x|+2|y|=\pi$, при $n=2$ получим график уравнения $|x|+2|y|=2\pi$. Строим графики таких уравнений. Графиком данного уравнения являются точка, находящаяся в начале координат, и вложенные друг в друга ромбы, стороны которых отличаются в два раза.



Ответ: см. график.

Вариант 6

1. Найдем $y(-x)=2(-x)^3\sin|-x|-x|\operatorname{ctg}(-x)|=-2x^3\sin|x|-x|\operatorname{ctg}x|=$ $=-(2x^3\sin|x|+x|\operatorname{ctg}x|)=-y(x)$. Было учтено, что функция котангенса

нечетная и $|-x| = |x|$. Так как $y(-x) = -y(x)$, то функция $y(x)$ нечетная по определению.

Ответ: нечетная.

2. Область определения задается условием, что функции $\operatorname{tg} 3x$ и $\operatorname{ctg} 3x$ определены. Поэтому $3x \neq \frac{\pi}{2}k$ $(k \in Z)$ и $x \neq \frac{\pi}{6}k$. Функция $y(x)$ нечетная. Для $\operatorname{tg} 3x > 0$ и $\operatorname{ctg} 3x > 0$ запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{9\operatorname{tg}3x + 4\operatorname{ctg}3x}{2} \geq \sqrt{9\operatorname{tg}3x \cdot 4\operatorname{ctg}3x} = 6$. Тогда $y(x) \in (-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$. Таким образом, $D(y)$ – все x, кроме $x = \frac{\pi}{6}k$ $(k \in Z)$, и $E(y) = (-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$.

Ответ: $D(y)$ – все x, кроме $x = \frac{\pi}{6}k$ $(k \in Z)$; $E(y) = (-\infty; -12] \cup [12; +\infty)$.

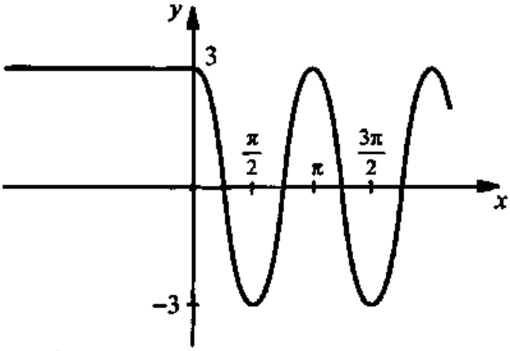
3. Найдем периоды функций, входящих в функцию $y(x)$. Получим: для функции $\operatorname{ctg} 3x$ – $T_1 = \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3}$, для функции $\cos x$ – $T_2 = 2\pi = \frac{6\pi}{3}$, для функции $\sin 2x$ – $T_3 = \pi = \frac{3\pi}{3}$. НОК $(T_1, T_2, T_3) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$. Поэтому период функции $y(x)$ равен $T = 2\pi$.

Ответ: 2π.

4. Запишем данную функцию в виде $y = 3\cos x + 2(1 - \cos^2 x) - 1 = -2\cos^2 x + 3\cos x + 1$. Обозначим $t = \cos x$ (где $-1 \leq t \leq 1$) и получим: $y = -2t^2 + 3t + 1$. Наибольшее значение функции достигается при $t = \frac{3}{4}$ и равно $y_{\text{наиб}} = -2 \cdot \frac{9}{16} + 3 \cdot \frac{3}{4} + 1 = 2\frac{1}{8}$, наименьшее значение достигается при $t = -1$ и равно $y_{\text{наим}} = -2 - 3 + 1 = -4$.

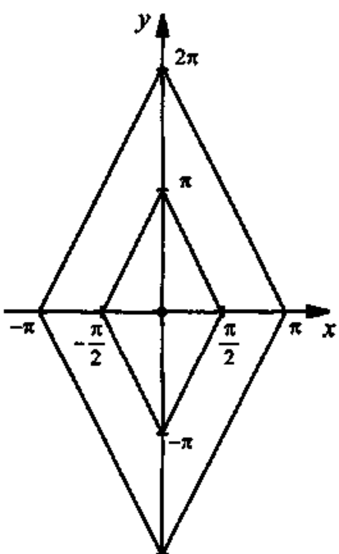
Ответ: $y_{\text{наим}} = -4$, $y_{\text{наиб}} = 2\frac{1}{8}$.

5, а. Для данной функции раскроем знак модуля и получим: $y = \begin{cases} 3, \text{ если } x < 0, \\ 3\cos 2x, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$ Построим график этой функции. Учтем, что график функции $y = 3\cos 2x$ получается из графика $y = \cos x$ растяжением в три раза вдоль оси ординат и сжатием в два раза вдоль оси абсцисс.



Ответ: см. график.

5, 6. Выпишем решения уравнения $\operatorname{tg}(2|x|+|y|)=0$ и получим: $2|x|+|y|=\pi n$ (где $n\in Z$ и $n\geq 0$). При $n=0$ получим: $x=y=0$ (начало координат), при $n=1$ имеем график уравнения $2|x|+|y|=\pi$, при $n=2$ получим график уравнения $2|x|+|y|=2\pi$. Строим графики таких уравнений. Графиком данного уравнения являются точка, находящаяся в начале координат, и вложенные друг в друга ромбы, стороны которых отличаются в два раза.



Ответ: см. график.

Уроки 30–31. Зачетная работа по теме «Тригонометрические функции»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найдите значение выражения $3\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}+5\sin\frac{5\pi}{2}-4\cos\frac{\pi}{3}$.

2. Упростите выражение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^2\alpha$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=7-2\cos^2 5x$ и ее область определения.

4. Решите неравенство $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$.

5. Известно, что $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$. Найдите остальные тригонометрические функции α.

6. Постройте график:

а) функции $y=\sin 2x+1$;

б) уравнения $\cos(x+y)=0$.

В

7. Упростите выражение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi-3\alpha)+\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$.

8. Известно, что $6\operatorname{tg}t-\operatorname{ctg}t=1$ и $t\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите значение выражения $\sin t-\cos t$.

9. Решите неравенство $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-1\geq 0$.

10. Постройте график функции $y=\sin^2\sqrt{9-x^2}+\cos^2\sqrt{9-x^2}$.

С

11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt{3\sin^2 x-\sin x+\cos^2 x+5}$.

12. Известно, что $\sin t+\cos t=a$. Найдите $\sin^3 t+\cos^3 t$.

13. Постройте график функции $y=x+\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

Вариант 2

А

1. Найдите значение выражения $2\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+7\sin\dfrac{9\pi}{2}-8\sin\dfrac{\pi}{6}$.

2. Упростите выражение $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^2\alpha$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=5-2\sin^2 2x$ и ее область определения.

4. Решите неравенство $\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$.

5. Известно, что $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Найдите остальные тригонометрические функции α.

6. Постройте график:

а) функции $y=\cos 2x-1$;

б) уравнения $\sin(y-x)=0$.

В

7. Упростите выражение $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+5\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-5\alpha)+\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

8. Известно, что $6\operatorname{tg}t-\operatorname{ctg}t=-1$ и $t\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдите значение выражения $\sin t+\cos t$.

9. Решите неравенство $2\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)-1\geq 0$.

10. Постройте график функции $y=\sin^2\sqrt{x^2-4}+\cos^2\sqrt{x^2-4}$.

С

11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{4\sin^2 x+2\sin x+2\cos^2 x+21}$.

12. Известно, что $\sin t+\cos t=a$. Найдите $\sin^4 t+\cos^4 t$.

13. Постройте график функции $y=x-\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

IV. Ответы и решения

Вариант 1

1. 0.
2. $-\sin^2\alpha$.
3. $y_{наим}=5$, $y_{наиб}=7$, $D(y)=(-\infty;+\infty)$.
4. $x=\dfrac{8}{15}\pi+\pi k,\ k\in Z$.
5. $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13},\ \operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{5}{12},\ \operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{12}{5}$.
6. *а*, *б* построены.
7. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.
8. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
9. $x\in\left[\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{2\pi k}{3};\ \dfrac{13\pi}{36}+\dfrac{2\pi k}{3}\right],\ k\in Z$.
10. $y=1$ при $x\in[-3;\ 3]$.

11. Используя основное тригонометрическое тождество, запишем функцию в виде $y=\sqrt{2\sin^2 x-\sin x+(\sin^2 x+\cos^2 x)+5}=$ $=\sqrt{2\sin^2 x-\sin x+6}$. Введем новую переменную $z=\sin x$ и $-1\le z\le 1$. Тогда функция имеет вид: $y=\sqrt{2z^2-z+6}$. На отрезке $z\in[-1;\ 1]$ наименьшее значение функции достигается при $z=\dfrac{1}{4}$, и оно равно $y_{наим}=\sqrt{2\cdot\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}+6}=\sqrt{\dfrac{47}{8}}$; наибольшее значение достигается при $z=-1$, и оно равно $y_{наиб}=\sqrt{2+1+6}=3$.

Ответ: $y_{наим}=\sqrt{\dfrac{47}{8}},\ y_{наиб}=3$.

12. Возведем равенство $\sin t+\cos t=a$ в квадрат и получим: $\sin^2 t+$ $+2\sin t\cos t+\cos^2 t=a^2$, откуда $\sin t\cos t=\dfrac{a^2-1}{2}$. Используем форму-

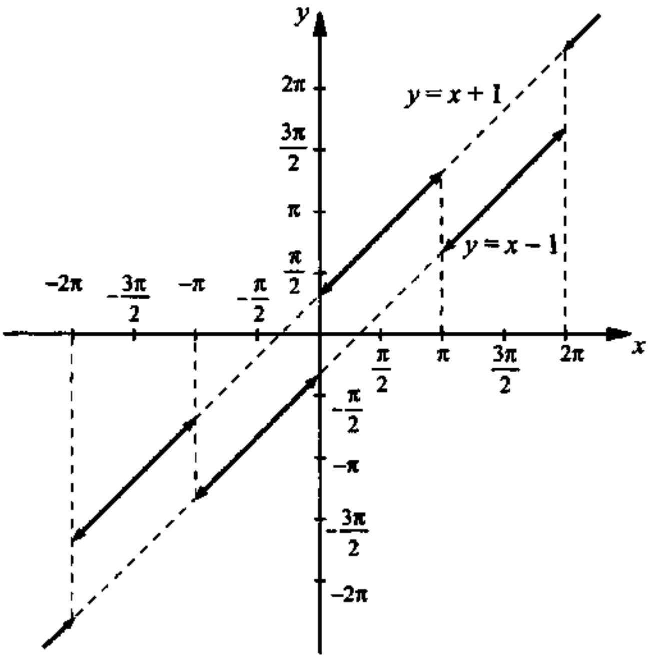
лу суммы кубов $\sin^3 t + \cos^3 t = (\sin t + \cos t)(\sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t) =$

$= (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) = a\left(a - \frac{a^2 - 1}{2}\right) = \frac{a(3 - a^2)}{2}.$

Ответ: $\frac{a(3 - a^2)}{2}$.

13. Данную функцию запишем в виде $y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } \sin x > 0, \\ x - 1, \text{ если } \sin x < 0. \end{cases}$

Выделим промежутки, на которых $\sin x > 0$, и построим график функции $y = x + 1$. На промежутках, на которых $\sin x < 0$, строим график функции $y = x - 1$.



Ответ: график построен.

Вариант 2

1. 1.

2. $-\cos^2 \alpha$.

3. $y_{наим} = 2$, $y_{наиб} = 5$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

4. $x = \frac{7\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z.$

5. $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$.

6. *а, б* построены.

7. $\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

8. $\frac{2}{5}\sqrt{10}$.

9. $x \in \left[-\frac{7\pi}{48} + \frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{48} + \frac{\pi}{2}k\right]$, $k \in Z$.

10. $y = 1$ при $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

11. Используя основное тригонометрическое тождество, запишем функцию в виде $y = \sqrt[3]{2\sin^2 x + 2\sin x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 21} = \sqrt[3]{2\sin^2 x + 2\sin x + 23}$. Введем новую переменную $z = \sin x$, $-1 \le z \le 1$. Тогда функция имеет вид: $y = \sqrt[3]{2z^2 + 2z + 23}$. На отрезке $z \in [-1;\ 1]$ наименьшее значение функции достигается при $z = -\frac{1}{2}$, и оно равно $y_{\text{наим}} = \sqrt[3]{2\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2} + 23} = \sqrt[3]{\frac{45}{2}}$; наибольшее значение достигается при $z = 1$, и оно равно $y_{\text{наиб}} = \sqrt[3]{2+2+23} = 3$.

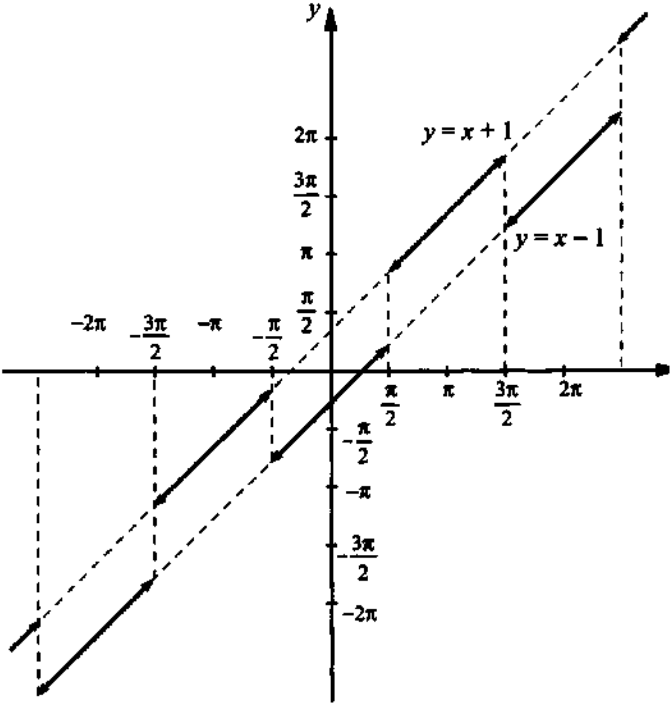
Ответ: $y_{\text{наим}} = \sqrt[3]{\frac{45}{2}}$, $y_{\text{наиб}} = 3$.

12. Возведем равенство $\sin t + \cos t = a$ в квадрат и получим: $\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t = a^2$, откуда $\sin t\cos t = \frac{a^2 - 1}{2}$. Используем формулу квадрата суммы: $\sin^4 t + \cos^4 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t = 1 - 2(\sin t\cos t)^2 = 1 - 2\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}$.

Ответ: $\frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}$.

13. Данную функцию запишем в виде $y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } \cos x > 0, \\ x + 1, & \text{если } \cos x < 0. \end{cases}$

Выделим промежутки, на которых $\cos x > 0$, и построим график функции $y = x - 1$. На промежутках, на которых $\cos x < 0$, строим график функции $y = x + 1$.



Ответ: график построен.

Глава 3
Тригонометрические уравнения

В предыдущей главе уже рассматривалось решение самых простых тригонометрических уравнений, например $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} x = -1$ и т. д.

Теперь изложенные подходы надо *обобщить* и применить для решения уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ и более сложных. Для этого надо изучить *обратные тригонометрические функции* – арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Уроки 32–33. Обратные тригонометрические функции

Цель: рассмотреть обратные тригонометрические функции, их использование для записи решений тригонометрических уравнений.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

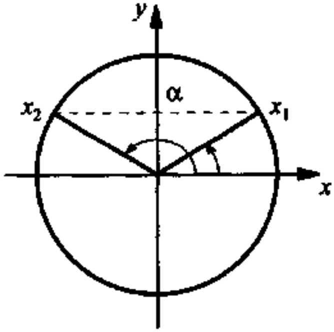
II. Изучение нового материала

1. Обратные тригонометрические функции

Рассмотрение этой темы начнем со следующего примера.

Пример 1

Решим уравнение: а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = a$.



а) На оси ординат отложим значение $\frac{1}{2}$ и построим углы x_1 и x_2, для которых $\sin x = \frac{1}{2}$. При этом $x_1 + x_2 = \pi$, откуда $x_2 = \pi - x_1$. По таблице значений тригонометрических функций найдем величину $x_1 = \frac{\pi}{6}$, тогда $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Учтем периодичность функции синуса и запишем решения данного уравнения: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

б) Очевидно, что алгоритм решения уравнения $\sin x = a$ такой же, как и в предыдущем пункте. Разумеется, теперь по оси ординат откладывается величина a. Возникает необходимость каким-то образом обозначить угол x_1. Условились такой угол обозначать символом $\arcsin a$. Тогда решения данного уравнения можно записать в виде $x_1 = \arcsin a + 2\pi k$ и $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где $k \in Z$. Эти две формулы можно объединить в одну: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, при этом $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$.

Аналогичным образом вводятся и остальные *обратные тригонометрические функции.*

Очень часто бывает необходимо определить величину угла по известному значению его тригонометрической функции. Такая задача является многозначной – существует бесчисленное множество углов, тригонометрические функции которых равны одному и тому же значению. Поэтому, исходя из *монотонности* тригонометрических *функций, для однозначного определения углов* вводят следующие *обратные тригонометрические функции.*

Арксинус числа a ($\arcsin a$) – такой угол α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a, т. е. $\alpha = \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin \alpha = a$.

Арккосинус числа a ($\arccos a$) – такой угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a, т. е. $\alpha = \arccos a \in [0; \pi]$; $\cos \alpha = a$.

Арктангенс числа a (arctg a) – такой угол α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a, т. е. $\alpha = \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Арккотангенс числа a (arcctg a) – такой угол α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a, т. е. $\alpha = \operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$; $\operatorname{ctg} \alpha = a$.

Пример 2

Найдем: а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; г) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

Учитывая определения обратных тригонометрических функций получим:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, так как $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$;

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$ и $\frac{3\pi}{4} \in (0; \pi)$.

Пример 3

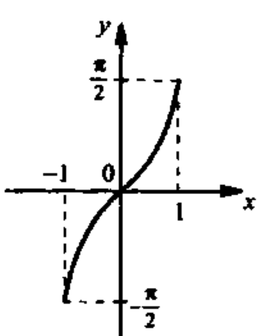
Вычислим $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Пусть угол $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$, тогда по определению $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, надо найти $\cos\alpha$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Учтено, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos\alpha \geq 0$. Итак, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Рассмотрим более подробно *свойства* обратных тригонометрических функций.

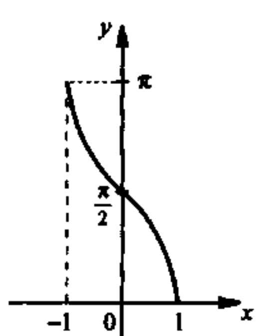
Свойства функции	Функция			
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения	$x \in [-1; 1]$	$x \in [-1; 1]$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
Область значений	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [0; \pi]$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$y \in (0; \pi)$
Четность	Нечетная	Ни четная, ни нечетная	Нечетная	Ни четная, ни нечетная
Нули функции ($y = 0$)	При $x = 0$	При $x = 1$	При $x = 0$	$y \neq 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ при $x \in (0; 1]$, $y < 0$ при $x \in [-1; 0)$	$y > 0$ при $x \in [-1; 1)$	$y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	$y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает
Связь с тригонометрической функцией	$\sin y = x$	$\cos y = x$	$\operatorname{tg} y = x$	$\operatorname{ctg} y = x$
График	*а*	*б*	*в*	*г*

а



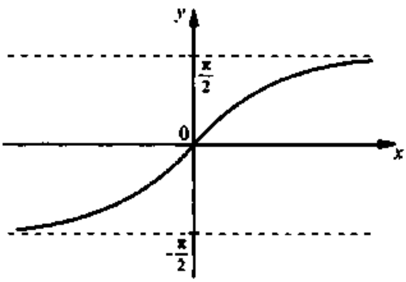
$y = \arcsin x$

б



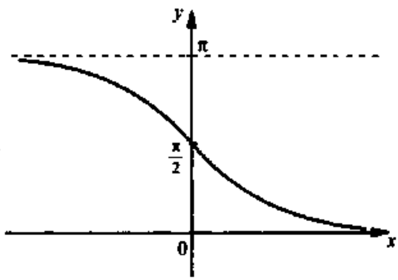
$y = \arccos x$

в



$y = \operatorname{arctg} x$

г



$y = \operatorname{arcctg} x$

Приведем еще ряд *типичных примеров*, связанных с определениями и основными свойствами обратных тригонометрических функций.

Пример 4

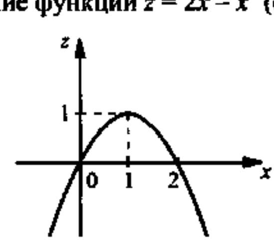
Найдем область определения функции $y = \arcsin(2x + x^2)$.

Для того чтобы функция y была определена, необходимо выполнение неравенства $-1 \le 2x + x^2 \le 1$, которое эквивалентно системе неравенств $\begin{cases} -1 \le 2x + x^2, \\ 2x + x^2 \le 1. \end{cases}$ Решением первого неравенства является промежуток $x \in (-\infty; +\infty)$, второго – $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$. Этот промежуток $x \in [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$ и является решением системы неравенств, а следовательно, и областью определения функции $D(y) = [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$.

Пример 5

Найдем область изменения функции $y = \operatorname{arcctg}(2x - x^2)$.

Рассмотрим поведение функции $z = 2x - x^2$ (см. рисунок).



Видно, что $z \in (-\infty; 1]$. Учитывая, что аргумент z функции арккотангенса меняется в указанных пределах, из данных таблицы получим, что $y = \operatorname{arcctg} z \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$. Таким образом, область изменения $E(y) = \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

Пример 6

Докажем, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечетная. Пусть $y(-x) = \operatorname{arctg}(-x) = \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -x$ или $x = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$, причем $-\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $-\alpha = \operatorname{arctg} x$ или $\alpha = -\operatorname{arctg} x$. Таким образом, видим, что $\alpha = \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, т. е. $y(x)$ – функция нечетная.

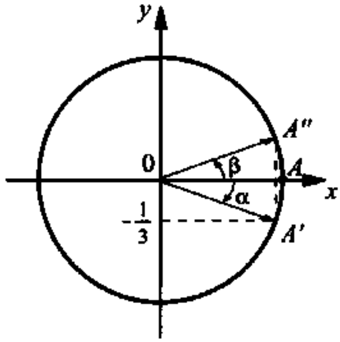
Пример 7

Выразим через все обратные тригонометрические функции $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Пусть $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$. Очевидно, что $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$. Так как $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Введем угол $\beta = -\alpha$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Так как $\cos\beta = \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, то $\beta = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha = -\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Аналогично $\operatorname{ctg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$, поэтому $\beta = \operatorname{arcctg} 2\sqrt{2}$ и $\alpha = -\operatorname{arcctg} 2\sqrt{2}$.



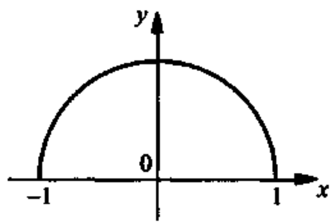
Итак, $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}} =$

$= -\operatorname{arcctg} 2\sqrt{2}$.

Пример 8

Построим график функции $y = \cos(\arcsin x)$.

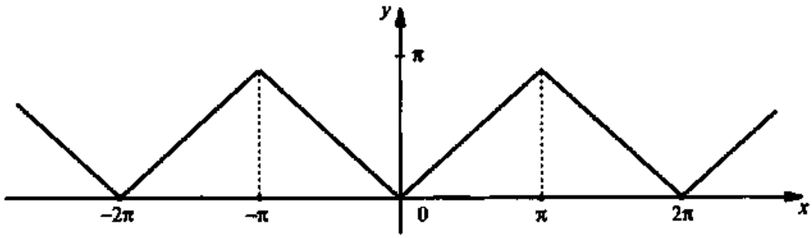
Обозначим $\alpha = \arcsin x$, тогда $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $y = \cos\alpha \geq 0$. Учтем, что $x = \sin\alpha$ и $y = \cos\alpha$, т. е. $x^2 + y^2 = 1$, и ограничения на x ($x \in [-1; 1]$) и y ($y \geq 0$). Тогда графиком функции $y = \cos(\arcsin x)$ является полуокружность.



Пример 9

Построим график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Так как функция $\cos x$ изменяется на отрезке $[-1; 1]$, то функция y определена на всей числовой оси и изменяется на отрезке $[0; \pi]$. Будем иметь в виду, что $y = \arccos(\cos x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$; функция y является четной и периодической с периодом 2π. Учитывая, что этими свойствами обладает функция $\cos x$, теперь легко построить график.



Отметим некоторые полезные равенства:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$,

$\arccos x + \arccos(-x) = \pi$, $\arcsin x + \arcsin(-x) = 0$,

$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = 0$.

Пример 10

Найдем наименьшее и наибольшее значения функции $y = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$. Обозначим $z = \arcsin x \left(-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}\right)$, тогда $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - z$. Получим функцию $y(z) = z^3 + \left(\frac{\pi}{2} - z\right)^3 =$ $= \frac{\pi}{2}\left(3z^2 - \frac{3\pi}{2}z + \frac{\pi^2}{4}\right)$. Эта функция имеет минимум в точке $z = \frac{\pi}{4}$, и он равен $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(3\frac{\pi^2}{16} - \frac{3\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^3}{32}$. Наибольшее значение функции достигается в точке $z = -\frac{\pi}{2}$, и оно равно $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\pi^2}{4} + \frac{3\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{7\pi^3}{4}$. Таким образом, $y_{наим} = \frac{\pi^3}{32}$ и $y_{наиб} = \frac{7\pi^3}{8}$.

Пример 11

Решим уравнение $3\operatorname{arctg} x + 5\operatorname{arcctg} x = 2\pi$.

Учтем, что $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Тогда уравнение имеет вид:

$3\operatorname{arctg} x + 5\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 2\pi$ или $-2\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, откуда $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$.

По определению арктангенса получим: $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

2. Решение простейших тригонометрических уравнений

Аналогично примеру 1 можно получить решения простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Решение
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z$

Пример 12

Решим уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как функция синус нечетная, то запишем уравнение в виде $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Решения этого уравнения: $3x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$, откуда находим $x = \frac{\pi}{18} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in Z$.

Пример 13

Решим уравнение $\operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

По приведенной формуле запишем решения уравнения: $4x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$ и найдем $x = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}k,\ k \in Z$.

Заметим, что *в частных случаях* ($a = 0; \pm 1$) при решении уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$ проще и удобнее использовать не общие формулы, а записывать решения на основании единичной окружности:

для уравнения $\sin x = 1$ решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

для уравнения $\sin x = 0$ решения $x = \pi k$;

для уравнения $\sin x = -1$ решения $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$;

для уравнения $\cos x = 1$ решения $x = 2\pi k$;

для уравнения $\cos x = 0$ решения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$;

для уравнения $\cos x = -1$ решения $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 14

Решим уравнение $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Так как в данном примере имеется частный случай уравнения, то по соответствующей формуле запишем решение: $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, откуда найдем $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

III. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)

1. Дайте определение и перечислите основные свойства обратных тригонометрических функций.
2. Приведите графики обратных тригонометрических функций.
3. Решение простейших тригонометрических уравнений.

IV. Задание на уроках

§ 15, № 3 (а, б); 4 (в, г); 7 (а); 8 (а); 12 (б); 13 (а); 15 (в); 16 (а); 18 (а, б); 19 (в); 21;

§ 16, № 4 (а, б); 7 (а); 8 (б); 16 (а, б); 18 (а); 19 (в, г);

§ 17, № 3 (а, б); 4 (в, г); 5 (а, б); 7 (в, г); 9 (б); 10 (а, в).

V. Задание на дом

§ 15, № 3 (в, г); 4 (а, б); 7 (в); 8 (б); 12 (а); 13 (б); 15 (г); 16 (б); 18 (в, г); 19 (г); 22;

§ 16, № 4 (в, г); 7 (б); 8 (а); 16 (в, г); 18 (б); 19 (а, б);

§ 17, № 3 (в, г); 4 (а, б); 5 (в, г); 7 (а, б); 9 (г); 10 (б, г).

VI. Творческие задания

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \cos(\arcsin 3x)$;

б) $y = \sin(\arccos 2x)$;

в) $y = \arccos(\sin 5x)$;

г) $y = \arcsin(\cos 4x)$;

ж) $y = \arcsin(2|x| - 3)$;

з) $y = \arccos(3|x| - 2)$;

и) $y = \arcsin\dfrac{2x-1}{x+1}$;

к) $y = \arccos\dfrac{x-3}{2x-1}$;

д) $\arcsin(\operatorname{tg} x)$;

е) $\arccos(\operatorname{ctg} x)$;

л) $y = \arcsin(x^2 - x - 1)$;

м) $y = \arccos(x^2 + x + 1)$.

Ответы: а) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; в, г) R; д) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, где $n \in Z$; е) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$, где $n \in Z$; ж) $[-2; -1] \cup [1; 2]$; з) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right]$; и) $[0; 2]$; к) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$; л) $[-1; 0] \cup [1; 2]$; м) $[-1; 0]$.

2. Найдите область значений функции:

а) $y = \arcsin(3x - 2)$;

б) $y = \arccos(3 - 2x)$;

в) $y = \operatorname{arctg}(1 - 2|x|)$;

г) $y = \operatorname{arcctg}(4|x| - 1)$;

д) $y = \operatorname{arctg}(\cos x)$;

е) $y = \operatorname{arcctg}(\sin x)$;

ж) $y = \arcsin \sqrt{x}$;

з) $y = \arccos \frac{1}{x^2 + 1}$;

и) $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 1}$;

к) $y = \arcsin \frac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 2}$.

Ответы: а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $[0; \pi]$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right]$; д) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$; е) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; ж) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; з) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; и) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; к) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Постройте график функции:

а) $y = \arcsin(x - 3)$;

б) $y = \sin(\arcsin x)$;

в) $y = \sin(\arccos x)$;

г) $y = \arcsin(\sin x)$;

д) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

е) $y = \arccos \frac{1}{x^2}$;

ж) $y = \arccos(x + 2)$;

з) $y = \cos(\arccos x)$;

и) $y = -\cos(\arcsin x)$;

к) $y = \arccos(\cos x)$;

л) $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{2x}$.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 34–35. Тригонометрические уравнения

Цель: рассмотреть решение тригонометрических уравнений.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение и перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$.

2. Постройте график функции:

а) $y = \arcsin(x+4)$;

б) $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+1}{x^2+\sqrt{3}}$.

3. Вычислите $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

Вариант 2

1. Дайте определение и перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

2. Постройте график функции:

а) $y = \arccos(x-3)$;

б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+1}$.

3. Вычислите $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{4}\right)$.

III. Изучение нового материала

Рассмотрим решение некоторых типов тригонометрических уравнений. Для этого необходимо с помощью преобразований данное уравнение свести к одному из простейших уравнений – $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, решение которых можно записать.

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Еще раз напомним решения простейших тригонометрических уравнений.

1. Решения уравнений $\sin x = a$ (где $|a| \le 1$) имеют вид: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$.

2. Решения уравнений $\cos x = a$ (где $|a| \leq 1$) имеют вид: $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. Решения уравнений $\operatorname{tg} x = a$ имеют вид: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$.

4. Решения уравнений $\operatorname{ctg} x = a$ имеют вид: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$.

При решении уравнений $\sin x = 0; \pm 1$ и $\cos x = 0; \pm 1$ (частные случаи) удобнее пользоваться не общими формулами, а использовать числовую окружность, тогда получим:

$\sin x = 0,\ x = \pi n;$

$\sin x = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$\sin x = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$\cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n;$

$\cos x = 1,\ x = 2\pi n;$

$\cos x = 1,\ x = \pi + 2\pi n.$

Пример 1

Для уравнения $\sin x = 1$ покажем предпочтительность использования числовой окружности.

Сначала запишем решения уравнения $\sin x = 1$, применяя общую формулу $x = (-1)^n \arcsin 1 + \pi n = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{2} + \pi n$. Для нескольких значений n такие решения приведены в таблице.

n	0	1	2	3	4	5
x	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{2}$	$\dfrac{9\pi}{2}$	$\dfrac{9\pi}{2}$

Из данных таблицы видно, что при использовании формулы $x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ каждое решение повторяется по два раза. Кроме того, выражение $x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ более громоздко по сравнению с формулой $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, которая получается при рассмотрении числовой окружности.

Пример 2

Найдем решения уравнения $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

Решим данное уравнение, используя числовую окружность. Получим: $3x-\frac{\pi}{4}=\pi n$ и $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n$. Отберем те решения, которые принадлежат отрезку $[0; \pi]$. По условию получим неравенство $0\le\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n\le\pi$. Решим это неравенство: $-\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{3}n\le\frac{11\pi}{12}$ и $-\frac{1}{4}\le n\le\frac{11}{4}$. В этот промежуток попадают три целых значения n: $n = 0, 1, 2$. Для этих значений n найдем соответствующие решения: $x=\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$.

Пример 3

Решим уравнение $\operatorname{tg}\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

Используя общую формулу, получим: $4x-\frac{\pi}{6}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n=$ $=\frac{\pi}{3}+\pi n$. Тогда $4x=\frac{\pi}{3}+\pi n+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n$, $n\in Z$.

2. Два основных метода решения тригонометрических уравнений

Для решения более сложных уравнений используют метод введения новой переменной и метод разложения на множители. Рассмотрим сначала *метод введения новой переменной*.

Пример 4

Решим уравнение: а) $3\cos^2 x-5\cos x+2=0$; б) $5-7\sin x=3\cos^2 x$.

а) Введем новую переменную $z = \cos x$ и получим квадратное уравнение $3z^2-5z+2=0$, корни которого $z_1 = 1$ и $z_2=\frac{2}{3}$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие уравнения $\cos x = 1$ и $\cos x=\frac{2}{3}$. Решения первого уравнения $x = 2\pi n$, решения второго уравнения $x=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

б) Используя формулу $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, в уравнении перейдем к функции $\sin x$. Получим: $5-7\sin x = 3(1-\sin^2 x)$ или $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$. Далее поступаем аналогично пункту *а*. Введем новую переменную $z = \sin x$ и получим квадратное уравнение $3z^2 - 7z + 2 = 0$, корни которого $z_1 = 2$ и $z_2 = \frac{1}{3}$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие уравнения $\sin x = 2$ (решений не имеет) и $\sin x = \frac{1}{3}$ (его решения $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$).

Теперь обсудим второй метод – *метод разложения на множители*. При его применении уравнение $f(x) = 0$ записывают в виде $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, тогда или $f_1(x) = 0$, или $f_2(x) = 0$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$.

Пример 5

Решим уравнение: а) $(\operatorname{tg} x - 1)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0$; б) $2\cos 3x \sin\frac{x}{4} + \cos 3x = 0$.

а) Левая часть уравнения уже разложена на множители. Задача сводится к решению совокупности уравнений $\operatorname{tg} x - 1 = 0$ (или $\operatorname{tg} x = 1$) и $\cos x + \frac{1}{2} = 0$ (или $\cos x = -\frac{1}{2}$). Решения первого уравнения $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, решения второго уравнения $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

б) Вынесем $\cos 3x$ за скобки и получим: $\cos 3x\left(2\sin\frac{x}{4} + 1\right) = 0$. Теперь необходимо решить совокупность уравнений $\cos 3x = 0$ и $2\sin\frac{x}{4} + 1 = 0$ (или $\sin\frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$). Решая первое уравнение, найдем: $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$. Решая второе уравнение, получим: $\frac{x}{4} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$.

Уточним рассматриваемый метод. Из уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ следует, что или $f_1(x) = 0$ (при этом выражение $f_2(x)$ имеет смысл), или $f_2(x) = 0$ (при этом выражение $f_1(x)$ имеет смысл).

Пример 6

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x(\cos+1)=0.$

Из уравнения $\operatorname{ctg} x = 0$ находим: $x=\operatorname{arcctg} 0+\pi n=\frac{\pi}{2}+\pi n,$ из уравнения $\cos x + 1 = 0$ (или $\cos x = -1$) получим: $x=\pi+2\pi n.$ Но при таких значениях x выражение $\operatorname{ctg} x$ не имеет смысла. Поэтому решения данного уравнения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

3. Однородные тригонометрические уравнения

Теперь обсудим часто встречающийся вид уравнений – однородные уравнения.

Определение. Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=0$ (где $a \neq 0$, $b \neq 0$) называют *однородным* тригонометрическим уравнением *первой степени*. Уравнение вида $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ (где $a \neq 0$) называют *однородным* тригонометрическим уравнением *второй степени*.

Рассмотрим сначала решение однородных тригонометрических уравнений первой степени $a\sin x+b\cos x=0$. Убедимся, что $\cos x \neq 0$. Предположим, что $\cos x = 0$, и подставим эту величину в данное уравнение. Получим: $a \sin x = 0$. Так как $a \neq 0$, то $\sin x = 0$. Очевидно, что равенства $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$ одновременно выполняться не могут, так как равенство $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ не выполняется.

Так как $\cos x \neq 0$, то разделим все члены уравнения на $\cos x$. Получим: $a\frac{\sin x}{\cos x}+b\frac{\cos x}{\cos x}=\frac{0}{\cos x}$ или $a\operatorname{tg} x+b=0$, откуда $\operatorname{tg} x=-\frac{b}{a}$ и $x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)+\pi n=-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi n.$

Пример 7

Решим уравнение $3\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=0.$

Разделим все члены уравнения на $\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$ и получим: $3\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)-2=0.$ Найдем $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2}{3},$ $2x-\frac{\pi}{8}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$ и $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}n.$

Пример 8

Решим уравнение $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi+3x)$.

Учтем четность функции косинуса и формулы приведения. Получим: $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos(\pi+3x)$ или $2\sin 3x=-\cos 3x$. Разделим обе части уравнения на $\cos 3x$. Имеем: $2\mathrm{tg}3x = -1$, откуда $\mathrm{tg}\,3x=-\frac{1}{2}$, $3x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$ и $x=-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}n$.

Рассмотрим теперь решение однородного тригонометрического уравнения второй степени $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ $(a \neq 0)$. Убедимся, что $\cos x \neq 0$. Подставим значение $\cos x = 0$ в данное уравнение и получим: $a\sin^2 x=0$. Так как $a \neq 0$, то имеем: $\sin x = 0$. Но равенства $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$ одновременно выполняться не могут.

Так как $\cos x \neq 0$, то разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{0}{\cos^2 x}$ или $a\,\mathrm{tg}^2 x+b\,\mathrm{tg}\,x+c=0$. Введем новую переменную $z = \mathrm{tg}\,x$ и придем к квадратному уравнению $az^2+bz+c=0$. Решаем это уравнение. Потом возвращаемся к старой переменной, получаем простейшие тригонометрические уравнения и находим их решения.

Пример 9

Решим уравнение $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\,x-2=0$. Введем новую переменную $z = \mathrm{tg}\,x$ и получим квадратное уравнение $z^2 - z - 2 = 0$, корни которого $z_1 = -1$ и $z_2 = 2$. Вернемся к старой переменной. Имеем простейшие тригонометрические уравнения $\mathrm{tg}\,x = -1$ (его решения $x=-\mathrm{arctg}1+\pi n=-\frac{\pi}{4}+\pi n$) и $\mathrm{tg}\,x = 2$ (его решения $x=\mathrm{arctg}\,2+\pi n$).

Пример 10

Решим уравнение $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=1$.

Данное уравнение не является однородным, так как в правой части стоит число 1, а не число 0. Если учесть равенство $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, то уравнение легко свести к однородному. Получим: $2\sin^2 x+$ $+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$ или $\sin^2 x+5\sin x\cos x+$

$+4\cos^2 x=0$. Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$. Имеем: $\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+4=0$. Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное уравнение $z^2+5z+4=0$, корни которого $z_1 = -1$ и $z_2 = -4$. Вернемся к старой переменной. Получим простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ (его решения $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$) и $\operatorname{tg} x=-4$ (его решения $x=-\operatorname{arctg} 4+\pi n$).

Пусть в однородном тригонометрическом уравнении $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ коэффициент $a = 0$. Тогда уравнение имеет вид: $b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$. В этом случае делить на $\cos^2 x$ *нельзя*, так как $\cos x$ может равняться нулю. Поэтому надо использовать метод разложения на множители. Получим $\cos x(b\sin x+c\cos x)=0$. Имеем простейшее тригонометрическое уравнение $\cos x = 0$ и однородное тригонометрическое уравнение первой степени $b\sin x+c\cos x=0$. Такие уравнения мы решать уже умеем.

Пример 11

Решим уравнение $\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0$.

Разложим левую часть уравнения на множители: $\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$. Произведение двух множителей равно нулю. Поэтому один из множителей равен нулю. Получаем простейшее тригонометрическое уравнение $\cos x = 0$ (его решения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$) и однородное тригонометрическое уравнение первого порядка $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$ или $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ (его решения $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$).

Метод разложения на множители также используется и в случае, когда коэффициент $c = 0$. Тогда уравнение имеет вид: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x=0$ или $\sin(a\sin x+b\cos x)=0$. Вновь получаем простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = 0$ и однородное тригонометрическое уравнение первого порядка $a\sin x+b\cos x=0$, которые решаются аналогично примеру 11.

Рассмотрение примеров 9–11 позволяет сформулировать *алгоритм решения* уравнения $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$.

1. Если коэффициент a не равен нулю, то все члены уравнения делят на $\cos^2 x$. Вводят новую переменную $z = \operatorname{tg} x$ и получают квадратное уравнение. Находят корни этого уравнения и возвращаются к

старой неизвестной. Получают простейшие тригонометрические уравнения и решают их.

2. Если коэффициенты a и c равны нулю, то используют метод разложения на множители. При $a = 0$ выносят за скобки $\cos x$, при $c = 0$ выносят $\sin x$. Получают простейшее тригонометрическое уравнение и однородное тригонометрическое уравнение первого порядка и решают их.

IV. Контрольные вопросы

1. Решения простейших тригонометрических уравнений.
2. Два основных метода решения тригонометрических уравнений.
3. Определение однородного тригонометрического уравнения первой и второй степеней.
4. Решение однородного тригонометрического уравнения первой степени.
5. Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения второй степени.

V. Задание на уроках

§ 18, № 3 (а, в); 5 (а, б); 6 (б); 8 (г); 10 (а, б); 11 (в); 12 (а); 13 (в); 16; 18; 20 (а); 21 (а, б); 23 (а); 27 (а, б); 30 (а); 31; 33 (а); 34 (б); 35 (а).

VI. Задание на дом

§ 18, № 3 (б, г); 5 (в, г); 6 (г); 8 (б); 10 (в, г); 11 (а); 12 (б); 13 (г); 17; 19; 20 (б); 21 (в, г); 23 (б); 27 (в, г); 30 (б); 32; 33 (б); 34 (а); 35 (б).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 36–37. Контрольная работа по теме «Тригонометрические уравнения»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg} 1 + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

2. Найдите корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ на промежутке [1; 6].

3. Решите уравнение:

а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

4. Найдите область определения и область значений функции $y = \arccos(4x - 3)$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{1}{2}$;

б) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

2. Найдите корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ на промежутке [1; 4].

3. Решите уравнение:

а) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$.

4. Найдите область определения и область значений функции $y = \arcsin(3x - 2)$.

Вариант 3

1. Вычислите:

а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\arccos\frac{1}{5} + \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

2. Найдите корни уравнения $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\cos x + 1) = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

3. Решите уравнение:

а) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = -1$;

б) $3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

4. Найдите область определения и область значений функции $y = 4\arcsin(2-3x) + \pi$.

Вариант 4

1. Вычислите:

а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \arccos\frac{1}{3}$.

2. Найдите корни уравнения $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1) = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

3. Решите уравнение:

а) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$;

б) $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$.

4. Найдите область определения и область значений функции $y = 2\arccos(3-4x) + 3\pi$.

Вариант 5

1. Вычислите:

а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\frac{1}{3}(\operatorname{arcctg}(-2) + \operatorname{arcctg} 2)\right)$.

2. Найдите корни уравнения $\sqrt{5x - x^2}\cdot(\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}) = 0$.

3. Решите уравнение:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + 3x\right) = 0$;

б) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$.

4. Постройте график функции $y = \sin(\arccos x)$.

Вариант 6

1. Вычислите:

а) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

б) $\sin\left(\frac{1}{6}\left(\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)+\arccos\frac{3}{7}\right)\right)$.

2. Найдите корни уравнения $\sqrt{6x-x^2}\cdot(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1)=0$.

3. Решите уравнение:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)=0$;

б) $2\cos^2 x-\sin x\cos x+5\sin^2 x=3$.

4. Постройте график функции $y=\cos(\arcsin x)$.

Урок 38. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. а) $\frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{3}{5}$.

2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

3. а) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n$; б) $2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

4. $D(y)=\left[\frac{1}{2};1\right]$, $E(y)=[0;\pi]$.

Вариант 2

1. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{4}{5}$.

2. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

3. а) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}n$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$.

4. $D(y)=\left[\frac{1}{3};1\right]$, $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 3

1. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) π.

2. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi$.

3. а) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{3}n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$.

4. $D(y) = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$, $E(y) = [-\pi; 3\pi]$.

Вариант 4

1. а) $\frac{1}{2}$; б) π.

2. $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$.

3. а) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$.

4. $D(y) = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $E(y) = [3\pi; 5\pi]$.

Вариант 5

1, а. Обозначим $\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$, тогда $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$. Надо найти $\sin\alpha$. Равенство $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$ возведем в квадрат и получим: $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{4}$, или $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{4}$, или $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{4}$, откуда $\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$ и $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Учтем, что $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $\sin\alpha < 0$.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

1, б. Используем равенство $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x) = \pi$. Тогда $\cos\left(\frac{1}{3}(\operatorname{arcctg}(-2) + \operatorname{arcctg} 2)\right) = \cos\left(\frac{1}{3}\cdot\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. ОДЗ уравнения задается условиями $5x - x^2 \geq 0$ (т. е. $0 \leq x \leq 5$) и $\sin x \neq 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а другой имеет смысл. Уравнение $\sqrt{5x - x^2} = 0$ имеет корни $x = 0$ и $x = 5$. Уравнение $\operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = 0$ (или $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$) имеет решения $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$. При этом в ОДЗ уравнения попадает только значение $x = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: 0; 5; $\frac{5\pi}{6}$.

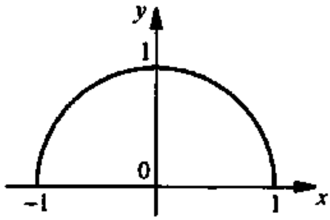
3, а. Учтем формулы приведения и получим однородное тригонометрическое уравнение первой степени $2\cos 3x + \sin 3x = 0$. Разделим все члены уравнения на $\cos 3x$. Имеем: $2 + \operatorname{tg} 3x = 0$ или $\operatorname{tg} 3x = -2$, откуда $3x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$ и $x = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{3}n$.

Ответ: $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{3}n$.

3, б. Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и получим однородное тригонометрическое уравнение второй степени $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$ или $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$. Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$. Имеем: $4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное уравнение $4z^2 + z - 3 = 0$, корни которого $z_1 = -1$ и $z_2 = \frac{3}{4}$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ (решения $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$) и $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ (решения $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n$).

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n$.

4. Обозначим $\alpha = \arccos x$, где $\alpha \in [0; \pi]$. Тогда $x = \cos\alpha$ и $y = \sin\alpha \geq 0$. Возведем эти равенства в квадрат: $x^2 = \cos^2\alpha$ и $y^2 = \sin^2\alpha$. Сложим равенства и получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$. С учетом ограничения $y \geq 0$ остается только верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиуса 1.



Ответ: график построен.

Вариант 6

1, а. Обозначим $\alpha = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$, тогда $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$. Надо найти $\cos\alpha$. Равенство $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$ возведем в квадрат и получим: $\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{9}$, или $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{9}$, или $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{9}$, откуда $\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$ и $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. Учтено, что $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\cos\alpha < 0$.

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

1, б. Используем равенство $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$. Тогда $\sin\left(\frac{1}{6}\left(\arccos\left(-\frac{3}{7}\right) + \arccos\frac{3}{7}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\cdot\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. ОДЗ уравнения задается условиями $6x - x^2 \geq 0$ (т. е. $0 \leq x \leq 6$) и $\cos x \neq 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю, а другой имеет смысл. Уравнение $\sqrt{6x - x^2} = 0$ имеет корни $x = 0$ и $x = 6$. Уравнение $\sqrt{3}\operatorname{tg}x - 1 = 0$ (или $\operatorname{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$) имеет решения $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$. При этом в ОДЗ уравнения попадают только значения $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{7\pi}{6}$.

Ответ: 0; 6; $x = \frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$.

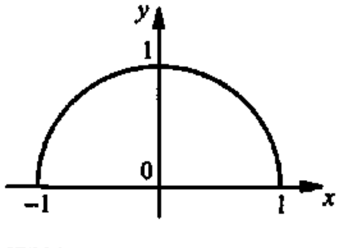
3, а. Учтем формулы приведения и получим однородное тригонометрическое уравнение первой степени $-\sin 2x - \cos 2x = 0$. Разделим все члены уравнения на $\cos 2x$. Имеем: $-\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$ или $\operatorname{tg} 2x = -1$, откуда $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$.

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$.

3, б. Используем равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и получим однородное тригонометрическое уравнение второй степени $2\cos^2 x - \sin x\cos x + 5\sin^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$ или $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$. Имеем: $2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$. Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное уравнение $2z^2 - z - 1 = 0$, корни которого $z_1 = 1$ и $z_2 = -\frac{1}{2}$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ (решения $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$) и $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ (решения $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$).

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$.

4. Обозначим $\alpha = \arcsin x$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $x = \sin\alpha$ и $y = \cos\alpha \geq 0$. Возведем эти равенства в квадрат: $x^2 = \sin^2\alpha$ и $y^2 = \cos^2\alpha$. Сложим равенства и получим уравнение окружности $x^2 + y^2 = 1$. С учетом ограничения $y \geq 0$ остается только верхняя полуокружность с центром в начале координат и радиуса 1.



Ответ: график построен.

Уроки 39–40. Зачетная работа по теме «Тригонометрические уравнения»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Вычислите $3\arcsin\frac{1}{2}+2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-4\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

2. Решите неравенство $2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\geq 1$.

3. Найдите решения уравнения $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

4. Найдите область определения и область значений функции $y=\arcsin|x|$.

5. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2=0$;

б) $8\sin^2 3x+\cos 3x+1=0$.

6. Постройте график функции $y=\arccos x+\arccos(-x)$.

В

7. Решите уравнение $3(\arcsin x)^2+2\pi\arcsin x-\pi^2=0$.

8. Найдите область определения и область значений функции $y=2\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

9. Решите уравнение $(\sin x-\cos x)^2\sqrt{9-x^2}=0$.

10. Решите неравенство $2\sin^2 x-\sin x\leq 0$.

С

11. Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=1$;

б) $\sqrt{5-3\sqrt{2}\cos x-\cos^2 x}+\sqrt{3}\sin x=0.$

12. Постройте график функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+1}.$

Вариант 2

А

1. Вычислите $5\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+4\arcsin\dfrac{1}{2}-3\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

2. Решите неравенство $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)\geq\sqrt{2}.$

3. Найдите решения уравнения $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

4. Найдите область определения и область значений функции $y=\arccos|x|$.

5. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg}^2 x-4\operatorname{ctg}x+3=0;$

б) $4\sin 2x+\cos^2 2x=4.$

6. Постройте график функции $y=\operatorname{arcctg}x+\operatorname{arcctg}(-x).$

В

7. Решите уравнение $6(\arccos x)^2+5\pi\arccos x-\pi^2=0.$

8. Найдите область определения и область значений функции $y=3\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}.$

9. Решите уравнение $(\sin x+\cos x)^4\sqrt{4-x^2}=0.$

10. Решите неравенство $2\cos^2 x+\cos x\leq 0.$

С

11. Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+3\cos^2 x=1;$

б) $\sqrt{-\sin^2 x-3-3\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{3}\cos x.$

12. Постройте график функции $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+\sqrt{3}}{x^2+1}.$

IV. Ответы и решения

Вариант 1

1. $-2\dfrac{1}{3}\pi.$

2. $\left[\frac{7\pi}{24}+2\pi n;\ \frac{19\pi}{24}+2\pi n\right]$.

3. $\frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

4. $D(y)=[-1;\ 1]$, $E(y)=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

5. а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 2+\pi n$; б) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n$.

6. $y=\pi$, $x\in[-1;\ 1]$.

7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$, $E(y)=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

9. $-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -3, 3$.

10. $\left[2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$.

11, а. Используем равенство $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и приведем уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$ или $\sin^2 x+5\sin x\cos x+$ $+4\cos^2 x=0$. Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+4=0$. Введем новую переменную $z=\operatorname{tg} x$ и придем к квадратному уравнению $z^2+5z+4=0$, корни которого $z_1=-1$ и $z_2=-4$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x=-1$ (решения $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$) и $\operatorname{tg} x=-4$ (решения $x=-\operatorname{arctg}4+\pi n$).

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}4+\pi n$.

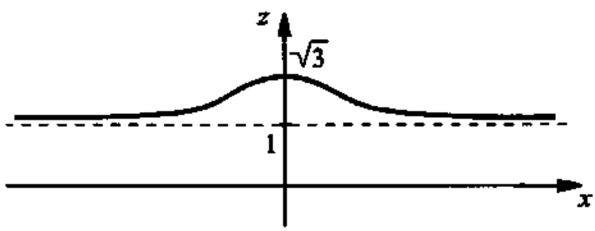
11, б. Запишем данное уравнение в виде $\sqrt{5-3\sqrt{2}\cos x-\cos^2 x}=$ $=-\sqrt{3}\sin x$. Учтем, что $\sin x\le 0$, и возведем обе части уравнения в квадрат: $5-3\sqrt{2}\cos x-\cos^2 x=3(1-\cos^2 x)$ или $2\cos^2 x-3\sqrt{2}\cos x+2=0$. Введем новую переменную $z=\cos x$ и получим квадратное уравнение $2z^2-3\sqrt{2}z+2=0$, корни которого $z_1=\sqrt{2}$ (не подходит, так как

$z \le 1$) и $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Вернемся к старой неизвестной и получим систему $\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x \le 0. \end{cases}$ Решения этой системы $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

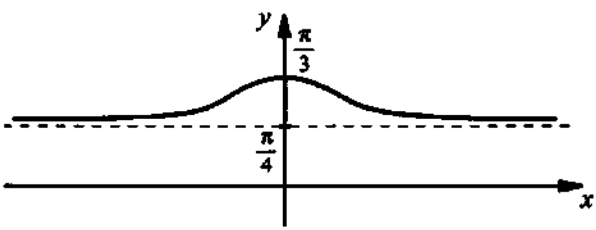
Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

12. Построим сначала аргумент $z = \frac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 1}$ данной функции $y(x)$. Функция $z(x)$ четная, и ее график симметричен относительно оси ординат. При $x = 0$ значение $z = \sqrt{3}$, при $x \to \infty$ значения $z \to 1$ (*а*). Учтем, что $y(0) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ и $y(\infty) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. После этого легко построить график данной функции $y = \operatorname{arctg}\frac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 1}$ (*б*).

а



б



Ответ: график построен.

Вариант 2

1. $2\frac{5}{6}\pi$.

2. $\left[-\frac{\pi}{20} + 2\pi n; \frac{9\pi}{20} + 2\pi n\right]$.

3. $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}$.

4. $D(y)=[-1; 1]$, $E(y)=\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5. а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg}3+\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}+\pi n$.

6. $y=\pi$, $x\neq \pi n$.

7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. $D(y)=(-\infty; +\infty)$, $E(y)=\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

9. $-\frac{\pi}{4}, -2, 2$.

10. $\left[-\frac{2\pi}{3}n+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$.

11, а. Используем равенство $\sin^2 x+\cos^2=1$ и приведем уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+3\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$ или $\sin^2 x-3\sin x\cos x+$ $+2\cos^2 x=0$. Разделим все члены уравнения на $\cos^2 x$ и получим: $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$. Введем новую переменную $z = \operatorname{tg} x$ и придем к квадратному уравнению $z^2 - 3z + 2 = 0$, корни которого $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ (решения $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$) и $\operatorname{tg} x = 2$ (решения $x = \operatorname{arctg}2 + \pi n$).

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}2+\pi n$.

11, б. Для уравнения $\sqrt{-\sin^2 x-3-3\sqrt{3}\sin x}=\sqrt{3}\cos x$ очевидно, что $\cos x\geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $-\sin^2 x-3-$ $-3\sqrt{3}\sin x=3\cos^2 x$. Запишем его в виде $-\sin^2 x-3-3\sqrt{3}\sin x=$ $=3(1-\sin^2 x)$ или $2\sin^2 x-3\sqrt{3}\sin x-6=0$. Введем новую переменную $z = \sin x$ и получим квадратное уравнение $2z^2-3\sqrt{3}z-6=0$, корни которого $z_1=2\sqrt{3}$ (не подходит, так как $z\leq 1$) и $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

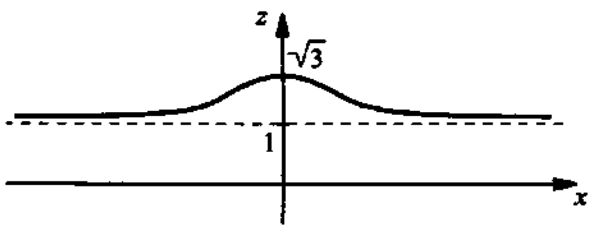
Вернемся к старой переменной и получим систему $\begin{cases} \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$

Решения этой системы $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$.

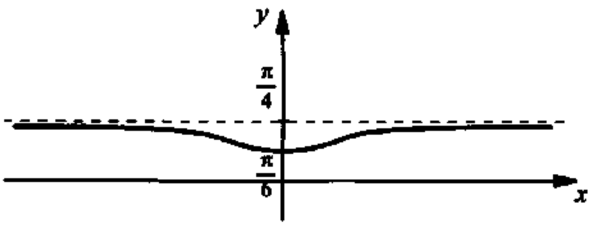
Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$.

12. Построим сначала аргумент $z = \dfrac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 1}$ данной функции $y(x)$. Функция $z(x)$ четная, и ее график симметричен относительно оси ординат. При $x = 0$ значение $z = \sqrt{3}$, при $x \to \infty$ значения $z \to 1$ (*а*). Учтем, что $y(0) = \text{arcctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$ и $y(\infty) = \text{arcctg}\,1 = \dfrac{\pi}{4}$. После этого легко построить график данной функции $y = \text{arcctg}\dfrac{x^2 + \sqrt{3}}{x^2 + 1}$ (*б*).

а



б



Ответ: график построен.

Глава 4
Преобразование тригонометрических выражений

К сожалению, после изучения глав 2 и 3 приходится признать, что пока мы в состоянии выполнять только простейшие преобразования тригонометрических выражений, решать самые простые тригонометрические уравнения и неравенства. Поэтому необходимо продолжить изучение *основных тригонометрических формул*. Учитывая, что формул достаточно много и они запоминаются с трудом, самые необходимые формулы (как и ранее) будем нумеровать. При этом будем придерживаться общей нумерации (три первые формулы уже пронумерованы).

Уроки 41–42. Синус, косинус и тангенс суммы и разности аргументов (обобщенное занятие)

Цель: рассмотреть формулы сложения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

Главу начнем с рассмотрения *формул для синуса и косинуса суммы и разности аргументов* (их также называют *формулы сложения*). Обратите особое внимание на эти формулы, так как из них достаточно просто могут быть получены практически все формулы тригонометрии.

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y; \tag{4}$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y; \tag{5}$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y; \tag{6}$$

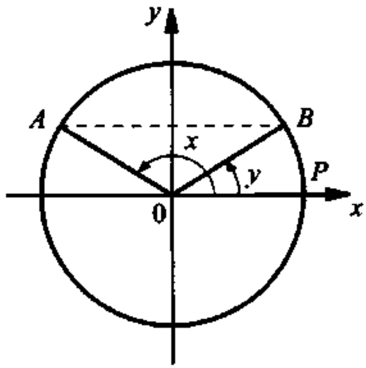
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y; \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y};$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

Пример 1

Получим формулу (4).



В единичной окружности радиус OP (равный 1) повернем на угол x и на угол y. Получим радиусы OA и OB. Легко записать координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$: $\overrightarrow{OA}(\cos x, \sin x)$ и $\overrightarrow{OB}(\cos y, \sin y)$. Найдем скалярное произведение этих векторов: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos x\cos y + \sin x\sin y$.

С другой стороны, $\angle AOB = x - y$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{OB}\right| = 1$. Поэтому скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ можно записать и по-другому: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB = \cos(x-y)$.

Сравнивая два полученных выражения для скалярного произведения векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, сразу получаем: $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$. Формулы (5)–(7) получаются из формулы (4) с использованием формул приведения и четности функции $\cos x$ и нечетности функции $\sin x$.

Пример 2

Получим пятую формулу.

Учтем формулы (7) и (5). Имеем: $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y}$. В полученной дроби разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos x\cos y$. Тогда имеем:
$$\frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y} + \dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} - \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$ Итак, полу-

чили $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$. Аналогично выводится и шестая формула.

Теперь рассмотрим *применение* формул этой группы.

Пример 3

Вычислим $\cos 15^\circ$.

Учтем, что 15 = 45 − 30, и тогда $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=$
$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\approx 0{,}966.$$

Таким образом, приведенные формулы позволяют *расширить значения* тригонометрических *функций*, представленных ранее в таблице.

Пример 4

Найдем $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\cos\alpha=c$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Используем формулу (6) и получим: $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-$ $-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt2}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$. Найдем $\sin\alpha$. Используя формулу (1), получаем: $\sin^2\alpha+c^2=1$, откуда $\sin\alpha=\sqrt{1-c^2}$ (учтено, что $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ и $\sin\alpha>0$). Тогда $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\sqrt2}{2}(c-\sqrt{1-c^2})$.

Пример 5

Докажем неравенство $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$, если $\alpha,\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Выпишем очевидные неравенства $\cos\beta\sin\alpha<\sin\alpha$ (так как $\cos\beta<1$) и $\cos\alpha\sin\beta<\sin\beta$ (так как $\cos\alpha<1$). Сложим два неравенства одного знака (при этом получившееся неравенство имеет тот же знак): $\cos\beta\sin\alpha+\cos\alpha\sin\beta<\sin\alpha+\sin\beta$ или по формуле (7) $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

Пример 6

Известно, что α, β, γ – углы треугольника. Докажем, что $\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$.

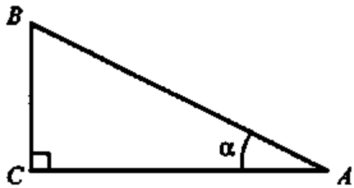
Учитывая, что α, β, γ – углы треугольника, имеем: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, откуда $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$.

Упростим выражение $\cos\gamma$: $\cos\gamma = \cos(180^\circ - (\alpha+\beta)) = \cos 180^\circ \cos(\alpha+\beta) + \sin 180^\circ \sin(\alpha+\beta) = -\cos(\alpha+\beta) = -(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$.

Здесь учтено, что $\cos 180^\circ = -1$ и $\sin 180^\circ = 0$ (что видно из единичной окружности). Тогда $\sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta$. Таким образом, тождество доказано.

Пример 7

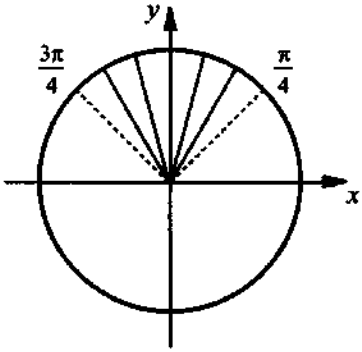
В каких пределах находится отношение суммы катетов к гипотенузе в прямоугольном треугольнике?



Пусть в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = c$ и один из острых углов $\angle A = \alpha$. Тогда через эти величины легко выразить катеты $AC = c\cdot\cos\alpha$ и $BC = c\cdot\sin\alpha$. Найдем отношение суммы катетов к гипотенузе: $x = \dfrac{BC + AC}{AB} = \dfrac{c\cdot\sin\alpha + c\cdot\cos\alpha}{c} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

Преобразуем выражение x, умножив и разделив его на $\sqrt{2}$. Получим: $x = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Здесь при преобразовании выражения x было учтено, что $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$.

Так как α – острый угол в треугольнике, то $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Прибавим ко всем частям этого неравенства $\dfrac{\pi}{4}$ и получим: $\dfrac{\pi}{4} < \alpha + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4}$. Для удобства обозначим $z = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$. Тогда необходимо найти диапазон изменения величины $x = \sqrt{2}\sin z$ при $\dfrac{\pi}{4} < z < \dfrac{3\pi}{4}$.



Диапазон этих углов отмечен на единичной окружности штриховкой (пунктир показывает, что значения углов $z=\frac{\pi}{4}$ и $z=\frac{3\pi}{4}$ не достигаются). Понятно, что наименьшее значение x получается при $z=\frac{\pi}{4}$ и $z=\frac{3\pi}{4}$ и равно $x=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

Наибольшее значение x достигается при $z=\frac{\pi}{2}$ и равно $x=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$. Итак, отношение суммы катетов к гипотенузе меняется в пределах $1<x\le\sqrt{2}$.

Пример 8

Докажем, что функция y = ctg x убывает на промежутках $(\pi n;\ \pi+\pi n)$, где $n\in Z$.

Данное утверждение достаточно доказать для промежутка $(0;\ \pi)$. Используя определение убывающей функции и функции котангенса, получим: $y(x_2)-y(x_1)=\operatorname{ctg}x_2-\operatorname{ctg}x_1=\frac{\cos x_2}{\sin x_2}-\frac{\cos x_1}{\sin x_1}=$ $=\frac{\sin x_1\cos x_2-\cos x_1\sin x_2}{\sin x_1\cdot\sin x_2}=\frac{\sin(x_1-x_2)}{\sin x_1\cdot\sin x_2}$. Определим знак этого выражения. Так как $0<x_1<x_2<\pi$, то $\sin x_1>0$ и $\sin x_2>0$. Поэтому знаменатель дроби положительный. Из неравенства находим $-\pi<x_1-x_2<0$, тогда $\sin(x_1-x_2)<0$. Поэтому дробь отрицательная, т. е. $y(x_1)-y(x_2)<0$ или $y(x_1)<y(x_2)$. Следовательно, на указанных промежутках функция y = ctg x убывает.

Пример 9

Найдем $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Обозначим $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$, тогда по определению $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Найдем $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (учтено, что $\cos\alpha\ \geq\ 0$). Аналогично обозначим $\beta=\arccos\frac{2}{3}$, тогда $\cos\beta=\frac{2}{3}$ и $\beta\in[0;\pi]$. Вычислим $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=$ $=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (учтено, что $\sin\beta\geq 0$).

Найдем: $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$ $=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2(1+\sqrt{10})}{9}$.

Пример 10

Вычислим $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Обозначим $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ (тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) и $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ (тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ и $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$). Найдем сумму углов $\alpha+\beta$. Сразу найти такую сумму нельзя. Поэтому вычислим любую тригонометрическую функцию от суммы углов. Проще всего найти тангенс. Учитывая известную формулу, получим: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$. Так как $\operatorname{tg}\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\beta>0$, то $\alpha,\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha+\beta\in[0;\pi)$. В промежутке $[0;\pi)$ уравнение

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 1$ имеет единственное решение $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. Поэтому $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

III. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)

1. Формулы для синуса суммы и разности аргументов.
2. Косинус суммы и разности аргументов.
3. Формулы для тангенса суммы и разности аргументов.

IV. Задание на уроках

§ 19, № 1 (а); 2 (б); 4 (а, б); 5 (а); 8; 10 (а, в); 11 (а, б); 12; 16 (а); 17 (а, б); 20 (а); 22 (б); 23 (а); 24 (а, б); 26 (в, г);

§ 20, № 1 (а, б); 2 (в, г); 4; 7 (а); 9 (б); 12 (а); 13; 15.

V. Задание на дом

§ 19, № 1 (б); 2 (г); 4 (в, г); 5 (б); 9; 10 (б, г); 11 (в, г); 13; 16 (б); 17 (в, г); 20 (б); 22 (а); 23 (б); 24 (в, г); 26 (а, б);

§ 20, № 1 (в, г); 2 (а, б); 5; 7 (б); 9 (а); 12 (б); 14; 16.

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 43–44. Формулы двойного аргумента

Цель: рассмотреть формулы кратных аргументов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулы $\sin(x+y)$, $\cos(x-y)$.
2. Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

Вариант 2

1. Напишите формулы $\sin(x-y)$, $\cos(x+y)$.
2. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$.

III. Изучение нового материала

1. Формулы двойного аргумента (угла)

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \qquad (8)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x. \qquad (9)$$

Пример 1

Выведем формулу (8).

В формуле $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ положим $x = y$. Получим: $\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x$ или $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Аналогично получается формула (9).

Пример 2

Упростим выражения:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha=2\sin\alpha-\sin\alpha=\sin\alpha$;

б) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\cos\alpha=$

$=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\cos\alpha=\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha=-\sin\alpha.$

Пример 3

Пусть $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. Найдем $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Сначала найдем $\cos\alpha$. Получим: $\left(\dfrac{5}{13}\right)^2+\cos^2\alpha=1$, откуда $\cos^2\alpha=\dfrac{144}{169}$ и $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$ (учтено, что $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ и $\cos\alpha<0$).

Теперь найдем требуемые величины:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)=-\dfrac{120}{169}$;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{119}{169}$;

$\operatorname{tg} 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{-120/169}{119/169}=-\dfrac{120}{119}$.

Из соотношений (8), (9) легко получить *формулы понижения степени*, которые очень *часто* используются при решении задач:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad (10)$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \qquad (11)$$

Пример 4

Докажем формулу (11).

Преобразуем правую часть равенства: $\frac{1+\cos 2x}{2} =$ $= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \cos^2 x$. Были учтены формулы (1) и (9). Аналогично доказывается и формула (10).

Пример 5

Найдем наибольшее и наименьшее значения выражения $A = 2\sin^2\alpha + 3\cos 2\alpha$.

Воспользуемся соотношением (10): $A = 2\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + 3\cos 2\alpha =$ $= 1 + 2\cos 2\alpha$. Теперь проведем оценки: $-1 \le \cos 2\alpha \le 1$, тогда $-2 \le 2\cos 2\alpha \le 2$ и $-2 + 1 \le 2\cos 2\alpha + 1 \le 2 + 1$, откуда $-1 \le 1 +$ $+ 2\cos 2\alpha \le 3$. Итак, $-1 \le A \le 3$.

2. Формулы тройного аргумента

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

Эти формулы применяются гораздо реже, чем формулы двойного аргумента. Но тем не менее в некоторых задачах их использование полезно.

Пример 6

Выведем формулу для $\sin 3x$.

Используем формулу для синуса суммы аргументов (7) и функций двойного аргумента (8)–(9) и получим: $\sin 3x = \sin(2x + x) =$ $= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$ $= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Пример 7

Вычислим $\sin\left(3\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Обозначим $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$, тогда $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Надо вычислить $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)$. Сначала найдем $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, затем $\sin 3\alpha = \frac{4}{5}\left(3 - 4\cdot\frac{16}{25}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{11}{25} = \frac{44}{125}$.

Формулы могут быть использованы и при решении более сложных задач.

Пример 8

Найдем $\sin 18^\circ$.

Используя формулы приведения, преобразуем $\sin 36^\circ = \sin(90^\circ - 54^\circ) = \cos 54^\circ$ или $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, или $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$ (где $\alpha = 18^\circ$). Далее применим формулы кратных углов $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Так как $\cos\alpha \neq 0$, то получим: $2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3 = 4(1-\sin^2\alpha) - 3 = 1 - 4\sin^2\alpha$ или $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$. Введем новую переменную $x = \sin\alpha = \sin 18^\circ$ и решим квадратное уравнение $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Его корни $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и $x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Учитывая, что $x > 0$, получим: $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3. Связь тригонометрических функций с тангенсом половинного аргумента

В ряде случаев полезны следующие формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad (x \neq \pi + 2\pi n);$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \left(x \neq \pi + 2\pi n,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

Пример 9

Получим формулу для $\operatorname{tg} x$.

Используем формулы (8)–(9) для функций двойного аргумента:

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{x}{2}$ и получим: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} - \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$. При этом возникают ограничения. Выражение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имеет смысл (тогда $\frac{x}{2} \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е. $x \ne \pi + 2\pi n$), и $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \ne \pm 1$ (тогда $\frac{x}{2} \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, т. е. $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$).

Пример 10

Решим уравнение $1 + \cos x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$.

Используем вторую из приведенных формул и получим: $1 + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$. Введем новую переменную $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и придем к рациональному уравнению $1 + \dfrac{1-y^2}{1+y^2} + y = 0$. Избавимся от знаменателя и получим: $(1+y)(1+y^2) + (1+y)(1-y) = 0$ или $(1+y)(y^2 - y + 2) = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $y = -1$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшее тригонометрическое уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, откуда $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

IV. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)

1. Формулы двойного аргумента.
2. Формулы тройного аргумента.
3. Связь тригонометрических функций с тангенсом половинного аргумента.

V. Задание на уроках

§ 21, № 1 (а, в); 2 (б); 3 (а, б); 5 (а); 9; 11 (а); 12 (б); 14 (а, б); 18 (а); 21 (в, г); 25 (а, г); 27 (а); 28 (б); 29 (а, б); 31 (а); 34 (б); 35 (а); 38 (б).

VI. Задание на дом

§ 21, № 1 (б, г); 2 (г); 3 (в, г); 5 (б); 10; 11 (б); 12 (а); 14 (в, г); 18 (б); 21 (а, б); 25 (б, в); 27 (б); 28 (в); 29 (в, г); 31 (б); 34 (а); 35 (б); 38 (а).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 45–46. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение

Цель: продолжить изучение основных тригонометрических формул.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Вычислите $\left(\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$.

Ответы: 1) 1; 2) $1-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $1+\sqrt{2}$.

2. Вычислите $\sin(2\operatorname{arctg}3)$.

Ответы: 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{10}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $-\frac{4}{5}$.

3. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{2(\cos\alpha-1)}$.

Ответы: 1) $\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha-1$; 3) $\cos\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$.

4. Решите уравнение $\frac{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x}=\sqrt{3}$.

Ответы: 1) $\frac{\pi}{3}+\pi n$; 2) $\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{5}n$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi n$; 4) $\frac{\pi}{30}+\frac{\pi}{5}n$.

Вариант 2

1. Вычислите $\left(\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\right)^2$.

Ответы: 1) $1+\sqrt{3}$; 2) 1; 3) 1,5; 4) 2.

2. Вычислите $\cos(2\operatorname{arctg}4)$.

Ответы: 1) $-\frac{15}{17}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $-\frac{3}{5}$; 4) $\frac{3}{10}$.

3. Упростите выражение $\frac{2(1+\cos\alpha)}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$.

Ответы: 1) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{2}{\cos\alpha}$; 3) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 4) $\frac{2}{\sin^2\alpha}$.

4. Решите уравнение $\frac{\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}5x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответы: 1) $\frac{\pi}{6}+\pi n$; 2) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}n$; 3) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}n$; 4) $\frac{\pi}{3}+\pi n$.

III. Изучение нового материала

Приведем следующую группу формул – формулы, с помощью которых можно преобразовать *суммы* тригонометрических формул *в произведения*:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (12)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \qquad (13)$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (14)$$

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}. \qquad (15)$$

Пример 1

Выведем формулу (14).

Представим углы x и y в виде $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ и $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$, воспользуемся формулами (5) и (4) и получим: $\cos x+\cos y=$

$$=\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-$$

$$-\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=$$
$$=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Пример 2

Преобразуем в произведение $A=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Сгруппируем члены этого выражения и используем приведенные формулы: $A=(\sin\alpha+\sin\beta)-[\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\gamma]=$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Пример 3

Упростим выражение $A=\dfrac{\sin 3\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha+\sin\alpha}$.

Воспользуемся формулами (7) и (12): $A=\dfrac{\sin(\alpha+2\alpha)-\sin\alpha\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha\sin 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4

Решим уравнение:

а) $\sin 12x=\sin 2x$;

б) $\sin 12x+\cos 2x=0$;

в) $\sin x+\sin 2x+\sin 4x+\sin 5x=0$.

а) Перенесем все члены уравнения в левую часть: $\sin 12x-\sin 2x=0$ – и преобразуем разность синусов в произведение: $2\cos\dfrac{12x+2x}{2}\sin\dfrac{12x-2x}{2}=0$ или $2\cos 7x\sin 5x=0$. Получим совокупность уравнений $\cos 7x=0$ (тогда $7x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi}{7}n$) и $\sin 5x=0$ (тогда $5x=\pi n$ и $x=\dfrac{\pi}{5}n$).

б) В отличие от предыдущей задачи в данном случае функции разноименные. Поэтому используем формулу приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}-12x\right)+\cos 2x=0$. Преобразуем сумму косинусов в произведение:

$$2\cos\frac{\frac{\pi}{2}-12x+2x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-12x-2x}{2}=0 \text{ или } 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)=0.$$

Учтем четность функции косинуса: $\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Приходим к совокупности уравнений $\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ (тогда $5x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n$) и $\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ (тогда $7x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi}{7}n$).

в) Сгруппируем члены уравнения $(\sin x+\sin 5x)+(\sin 2x+\sin 4x)=0$. Преобразуем суммы синусов в произведения: $2\sin 3x\cos 2x+$ $+2\sin 3x\cos x=0$. Вынесем общий множитель за скобки: $\sin 3x(\cos 2x+\cos x)=0$. Преобразуем сумму косинусов в произведение: $\sin 3x\cdot 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$. Получим совокупность уравнений $\sin 3x = 0$ (тогда $3x = \pi n$ и $x=\frac{\pi}{3}n$), $\cos\frac{3x}{2}=0$ (тогда $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$) и $\cos\frac{x}{2}=0$ (тогда $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x = \pi + 2\pi n$). Заметим, что решения $x=\frac{\pi}{3}n$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$ и $x = \pi + 2\pi n$ можно объединить одной формулой $x=\frac{\pi}{3}n$.

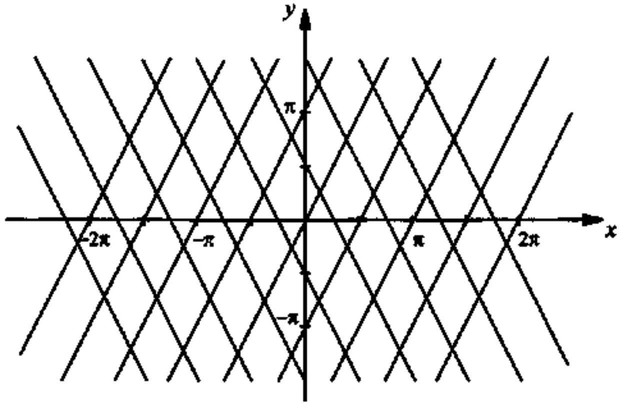
Пример 5

Построим график уравнения: а) $\sin 2y = \sin 4x$; б) $\cos y = \cos x^2$.

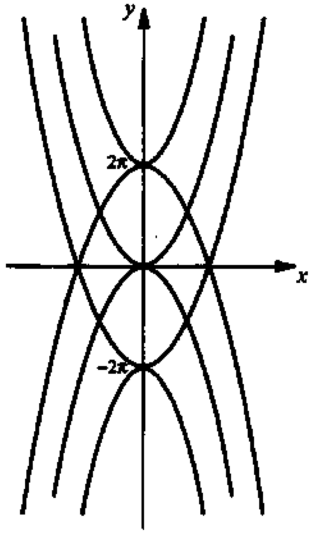
Найдем более простую связь между переменными y и x. Для этого преобразуем разность тригонометрических функций в произведение.

а) Получим: $\sin 2y - \sin 4x = 0$ или $2\cos(y+2x)\sin(y-2x)=0$. Приходим к совокупности уравнений $\cos(y+2x)=0$ (тогда $y+2x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $y=-2x+\frac{\pi}{2}+\pi n$) и $\sin(y-2x)=0$ (тогда $y - 2x = \pi n$ и $y = 2x + \pi n$).

Таким образом, придавая n различные значения, строим два семейства прямых: $y = -2x + \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $y = 2x + \pi n$ (параллельные прямые).



б) Получим: $\cos y - \cos x^2 = 0$ или $2\sin\frac{y+x^2}{2}\sin\frac{x^2-y}{2} = 0$. Приходим к совокупности уравнений $\sin\frac{y+x^2}{2} = 0$ (тогда $\frac{y+x^2}{2} = \pi n$ и $y = -x^2 + 2\pi n$) и $\sin\frac{x^2-y}{2} = 0$ (тогда $\frac{x^2-y}{2} = \pi n$ и $y = x^2 + 2\pi n$). Строим эти семейства парабол.



Рассмотрим теперь *метод вспомогательного угла*. Он используется для преобразования выражений вида $A\sin x + B\cos x$ к *одной* тригонометрической *функции*. Данное выражение (обозначим его z) умножим и разделим на число $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Получим: $z = C\left(\frac{A}{C}\sin x + \frac{B}{C}\cos x\right)$. Легко проверить, что выполняется равенство $\left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2} = \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2} = 1$. Поэтому можно считать, что $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ – значения тригонометрических функций некоторого (*вспомогательного*) угла t: $\cos t = \frac{A}{C}$ и $\sin t = \frac{B}{C}$. Тогда выражение z можно записать в виде $z = C(\sin x\cos t + \cos x\sin t) = C\sin(x + t)$. При этом угол t можно найти из равенства $\cos t = \frac{A}{C}$ или $\sin t = \frac{B}{C}$. Но так как число C записывают в виде радикала, то получают равенство $\operatorname{tg} t = \frac{B}{A}$, из которого находят угол $t = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$.

Таким образом, выражение $z = A\sin x + B\cos x$ можно записать в виде $z = C\sin(x + t)$, где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ и $t = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$.

Пример 6

Преобразуем выражение $z = \sin x + 2\cos x$.

В данном случае коэффициенты $A = 1$, $B = 2$. Найдем число $C = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ и $\operatorname{tg} t = \frac{2}{1} = 2$ (тогда $t = \operatorname{arctg} 2$). Получим:

$$z = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right) = \sqrt{5}(\cos t\sin x + \sin t\cos x) = \sqrt{5}\sin(x + t),$$

где $t = \operatorname{arctg} 2$.

Заметим, что выражение $z = A\sin x + B\cos x$ можно привести и к виду $z = C\cos(x - \bar{t})$, где $\bar{t} = \operatorname{arctg}\frac{A}{B}$. Для этого обозначим $\cos\bar{t} = \frac{B}{C}$ и $\sin\bar{t} = \frac{A}{C}$, тогда $z = C(\sin\bar{t}\sin x + \cos\bar{t}\cos x) = C\cos(x - \bar{t})$.

Пример 7

Преобразуем выражение $z = \sin s + 2\cos x$.

Запишем данное выражение в виде $z=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}\sin}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)=$
$=\sqrt{5}(\sin\overline{t}\sin x+\cos\overline{t}\cos x)=\sqrt{5}\cos(x-\overline{t})$, где $\operatorname{tg}\overline{t}=\frac{1}{2}$ и $\overline{t}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Пример 8

Найдем наименьшее и наибольшее значения выражения $z=3\sin x+4\cos x+7$.

Представим выражение $\overline{z}=3\sin x+4\cos x$ в виде одного синуса. В данном случае $A=3$ и $B=4$. Найдем $C=\sqrt{3^2+4^2}=5$, умножим и разделим выражение $\overline{z}$ на число C. Получим: $\overline{z}=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)$. Обозначим $\cos t=\frac{3}{5}$ и $\sin t=\frac{4}{5}$ (тогда $\operatorname{tg}t=\frac{4}{3}$ и $t=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$). Запишем выражение $\overline{z}$ в виде $\overline{z}=5(\cos t\sin x+\sin t\cos x)=5\sin(x+t)$. Тогда выражение имеет вид: $z=5\sin(x+t)+7$. Оценим это выражение. В силу ограниченности синуса получим неравенство $-1\le\sin(x+t)\le 1$. Умножим все части этого неравенства на положительное число 5 (при этом знаки неравенства сохраняются): $-5\le 5\sin(x+t)\le 5$. Ко всем частям неравенства прибавим число 7 и получим: $2\le 5\sin(x+t)+7\le 12$ или $2\le z\le 12$. Итак, имеем: $z_{\text{наим}}=2$ и $z_{\text{наиб}}=12$.

Пример 9

Решим уравнение $\sqrt{3}\sin x+\cos x+2\cos 5x=0$.

Первые два слагаемых приведем к функции косинуса. Для этого умножим и разделим их на число $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$. Получим: $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+2\cos 5x=0$. Обозначим $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos t=\frac{1}{2}$, отсюда $\operatorname{tg}t=\sqrt{3}$ и $t=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение имеет вид: $2\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x\right)+2\cos 5x=0$ или $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos 5x=0$. Преобразуем сумму функций в произведение: $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

Приходим к совокупности уравнений: $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ (тогда $3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{3}n$) и $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ (тогда $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}n$).

IV. Контрольные вопросы

1. Формулы преобразования сумм тригонометрических функций в произведения (фронтальный опрос).
2. Метод вспомогательного угла.

V. Задание на уроках

§ 22, № 1 (а, б); 4 (в, г); 5 (а, б); 6 (а, г); 9 (а); 11 (б); 12 (а, б); 14 (а); 16 (в, г); 17 (а, б); 18 (б); 19 (а, б); 20 (а); 21 (б); 22 (а).

VI. Задание на дом

§ 22, № 1 (в, г); 4 (а, б); 5 (в, г); 6 (б, в); 9 (б); 11 (а); 12 (в, г); 14 (б); 16 (а, б); 17 (в, г); 18 (а); 19 (в, г); 20 (б); 21 (а); 22 (б).

VII. Творческие задания

1. Запишите в виде одной тригонометрической функции:
   а) $\sin x + \cos x$;
   б) $\cos x - \sin x$;
   в) $\sqrt{3}\sin x+\cos x$;
   г) $\sqrt{3}\cos x-\sin x$;
   д) $12\sin x - 5\cos x$;
   е) $12\cos x + 5\sin x$.

Ответы: а) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; в) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; д) $13\sin(x - t)$, где $t=\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; е) $13\cos(x - t)$, где $t=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$.

2. Решите уравнение или неравенство:
   а) $\sin x - \cos x \geq 1$;
   б) $\sin x+\cos x\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$;
   в) $\sqrt{3}\sin x-\cos x\geq 1$;
   г) $\sqrt{3}\cos x+\sin x\leq\sqrt{3}$;
   д) $12\sin x+5\cos x=13$;
   е) $24\cos x-10\sin x=13$;

ж) $\sqrt{3}\sin x+\cos x-2\sin 7x=0$;

з) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 9x$.

Ответы: а) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$; б) $\left[-\frac{19\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi n\right]$; в) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right]$; д) $-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+\frac{\pi}{2}+2\pi n$; е) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; ж) $-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{3}n$, $\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi}{4}n$; з) $\frac{\pi}{40}+\frac{\pi}{5}n$; $-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{4}n$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 47–48. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

Цель: закончить изучение основных тригонометрических формул.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулы для:

а) $\sin x+\sin y$;

б) $\cos x-\cos y$.

2. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x=1$.

Вариант 2

1. Напишите формулы для:

а) $\sin x-\sin y$;

б) $\cos x+\cos y$.

2. Упростите выражение $\frac{\sin 3\alpha-\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos 3\alpha-\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}$.

3. Решите уравнение $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=1$.

III. Изучение нового материала

Чтобы закончить изучение этой темы, необходимо рассмотреть последнюю группу формул – *преобразования произведений* тригонометрических функций *в суммы*:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]; \tag{16}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]; \tag{17}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]. \tag{18}$$

Пример 1

Выведем формулу (16).

Используя соотношение (5), запишем: $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Вычтем из первого выражения второе и получим: $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y$, откуда $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$.

Пример 2

Вычислим $A = \sin 15^\circ \cos 7^\circ - \cos 11^\circ \cos 79^\circ - \sin 4^\circ \sin 86^\circ$.

Используя формулы (16)–(18), запишем: $A = \frac{1}{2}(\sin 8^\circ + \sin 22^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 68^\circ + \cos 90^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 82^\circ - \cos 90^\circ) = \frac{1}{2}(\sin 8^\circ + \sin 22^\circ - \cos 68^\circ - \cos 82^\circ)$.

Здесь учтено, что $\cos 90^\circ = 0$. Рассмотрим $\cos 68^\circ = \cos(90^\circ - 22^\circ) = \cos 90^\circ \cos 22^\circ + \sin 90^\circ \sin 22^\circ = \sin 22^\circ$ и $\cos 82^\circ = \cos(90^\circ - 8^\circ) = \sin 8^\circ$.

Получим: $A = \frac{1}{2}(\sin 8^\circ + \sin 22^\circ - \sin 22^\circ - \sin 8^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

Пример 3

Найдем наименьшее и наибольшее значения выражения $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{24}\right)$. Используя формулу (18), получим: $A = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{8} - \alpha + \frac{\pi}{24}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{8} + \alpha - \frac{\pi}{24}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{6} + \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right)$. Оценим эту величину: $-1 \le \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \le 1$, тогда $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \le \frac{1}{2}$ (все части неравенства умножили на положительное число $\frac{1}{2}$) и $-\frac{1}{4} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \le \frac{3}{4}$ (ко всем частям прибавили $\frac{1}{4}$). Итак, получили: $-\frac{1}{4} \le A \le \frac{3}{4}$, т. е. наименьшее значение $A_{наим} = -\frac{1}{4}$ и наибольшее значение $A_{наиб} = \frac{3}{4}$.

Пример 4

Решим уравнение $\cos 8x \cos 3x = \cos 14x \cos 9x$.

Используя формулу (17), получим: $\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 11) = \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 23x)$ или $\cos 11x = \cos 23x$. Запишем уравнение в виде $\cos 11x - \cos 23x = 0$ и представим разность косинусов в виде произведения функций: $2\sin 17x \sin 6x = 0$. Получим совокупность уравнений $\sin 17x = 0$ (тогда $17x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{17}n$) и $\sin 6x = 0$ (тогда $6x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{6}n$).

IV. Контрольный вопрос

Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы.

V. Задание на уроках

§ 23, № 1 (а, б); 2 (в, г); 3 (а, б); 4 (а); 5 (б); 6 (а); 7 (б); 8 (а); 9 (б); 10 (а, б); 11 (а); 12 (б); 13.

VI. Задание на дом

§ 23, № 1 (в, г); 2 (а, б); 3 (в, г); 4 (б); 5 (а); 6 (б); 7 (а); 8 (б); 9 (а); 10 (в, г); 11 (б); 12 (а).

VII. Подведение итогов уроков

2-е полугодие

Формально изучение тригонометрии закончено. Чтобы обобщить материал глав 2 – 4, целесообразно рассмотреть, во-первых, решение задач повышенной сложности и, во-вторых, решение тригонометрических уравнений, систем уравнений, неравенств.

Уроки 49–50. Решение задач повышенной сложности (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть более сложные задачи.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

Сначала еще раз приведем *основные* (пронумерованные) формулы (по группам).

Функции одного аргумента:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \; x \neq \pi n. \tag{3}$$

Синус и косинус суммы и разности аргументов:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \tag{4}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \tag{5}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos y \sin y; \tag{6}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{7}$$

Синус и косинус двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x; \tag{8}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{9}$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \tag{10}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \tag{11}$$

Преобразование сумм функций в произведения:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (12)$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}; \qquad (13)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (14)$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{x+y}{2}. \qquad (15)$$

Преобразование произведений функций в суммы:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]; \qquad (16)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]; \qquad (17)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]. \qquad (18)$$

Теперь рассмотрим некоторые задачи.

Пример 1

Построим график функции $y = |\sin x|\cos x + \sin x|\cos x|$.

Раскроем знаки модулей по координатным четвертям.

I четверть

Тогда $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$ и $y = \sin x\cos x + \sin x\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

II четверть

Тогда $\sin x \geq 0$, $\cos x < 0$ и $y = \sin x\cos x - \sin x\cos x = 0$.

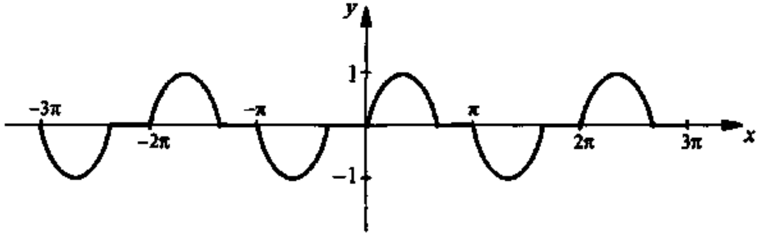
III четверть

Тогда $\sin x < 0$, $\cos x < 0$ и $y = -\sin x\cos x - \sin x\cos x = -2\sin\cos x = -\sin 2x$.

IV четверть

Тогда $\sin x < 0$, $\cos x \geq 0$ и $y = -\sin x\cos x + \sin x\cos x = 0$.

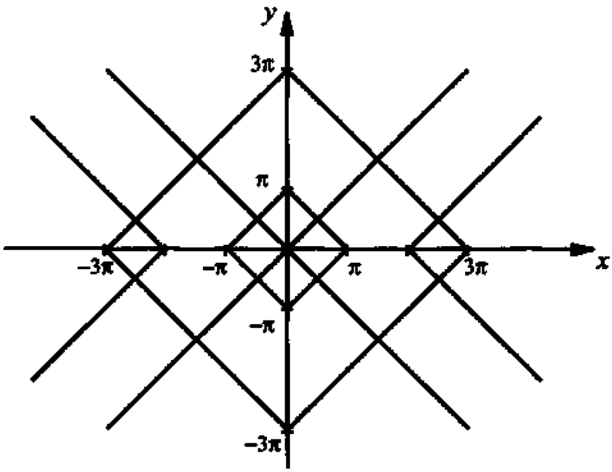
Теперь легко построить график данной функции.



Пример 2

Построим график уравнения $\sin|y| = \sin|x|$.

Запишем равенство в виде $\sin|y| - \sin|x| = 0$ и преобразуем разность в произведение: $2\sin\frac{|y|-|x|}{2}\cos\frac{|y|+|x|}{2} = 0$. Получим совокупность уравнений $\sin\frac{|y|-|x|}{2} = 0$ (тогда $\frac{|y|-|x|}{2} = \pi n$ и $|y| = |x| + 2\pi n$) и $\cos\frac{|y|+|x|}{2} = 0$ (тогда $\frac{|y|+|x|}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $|y| = -|x| + \pi + 2\pi n$). Придавая n различные значения, строим линии $|y| = |x| + 2\pi n$ и $|y| = -|x| + \pi + 2\pi n$.



Пример 3

Упорядочим числа cos 1, cos 2, cos 3, cos 4, cos 5.

Учтем, что функция косинуса убывает на промежутке [0; π]. Числа 1, 2, 3 принадлежат этому промежутку. Так как функция косинуса четная и ее период равен 2π, то получим: $\cos 4 = \cos(2\pi - 4)$ и $\cos 5 = \cos(2\pi - 5)$. Теперь аргументы $2\pi - 4$ и $2\pi - 5$ также принадлежат промежутку [0; π]. Упорядочивая числа 1, 2, 3, $2\pi - 4$ и $2\pi - 5$, получим неравенство $1 < 2\pi - 5 < 2 < 2\pi - 4 < 3$, откуда $\cos 1 > \cos(2\pi - 5) > \cos 2 > \cos(2\pi - 4) > \cos 3$ или $\cos 3 < \cos 4 < \cos 2 < \cos 5 < \cos 1$.

Пример 4

Найдем точки минимума и максимума функции $y = 3 - 64\cos 4x\cos 2x\cos x\sin x$.

Используя формулу для синуса двойного угла, преобразуем последнее слагаемое: $64\cos 4x\cos 2x\cos x\sin x = 32\cdot(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x =$ $= 16\cdot(2\sin 2x\cos 2x)\cos 4x = 8\cdot(2\sin 4x\cos 4x) = 8\sin 8x$. Тогда функция имеет вид: $y = 3 - 8\sin 8x$. Так как $-1 \le \sin 8x \le 1$, то $8 \ge -8\sin 8x \ge -8$ и $11 \ge 3 - 8\sin 8x \ge -5$, т. е. $-5 \le y \le 11$. Таким образом, $y_{\min} = -5$. Минимум функции достигается при условии $\sin 8x = 1$, откуда $8x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ (где $n \in Z$) и $x_{\min} = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi}{4}n$. Максимум функции $y_{\max} = 11$ и достигается при условии $\sin 8x = -1$, откуда $8x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x_{\max} = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi}{4}n$.

Пример 5

Вычислим $A = \operatorname{tg}^2 36^\circ \operatorname{tg}^2 72^\circ$.

Вычтем и прибавим единицу к выражению A:

$$A = 1 + (\operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ - 1) = 1 + \left(\frac{\sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ} - 1\right) =$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 36^\circ \sin^2 72^\circ - \cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ} =$$

$$= 1 + \frac{(\sin 36^\circ \sin 72^\circ - \cos 36^\circ \cos 72^\circ)(\sin 36^\circ \sin 72^\circ + \cos 36^\circ \cos 72^\circ)}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ} =$$

$$= 1 + \frac{-\cos(36^\circ + 72^\circ)\cos(72^\circ - 36^\circ)}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ} = 1 + \frac{-\cos 108^\circ \cos 36^\circ}{\cos^2 36^\circ \cos^2 72^\circ} =$$

$$= 1 + \frac{-\cos(108^\circ - 72^\circ)}{\cos 36^\circ \cos^2 72^\circ} = 1 + \frac{\cos 72^\circ}{\cos 36^\circ \cos^2 72^\circ} = 1 + \frac{2\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ\, 2\sin 36^\circ} =$$

$$= 1 + \frac{2\sin 36^\circ}{(2\sin 36^\circ \cos 36^\circ)\cos 72^\circ} = 1 + \frac{2\cdot 2\sin 36^\circ}{2\sin 72^\circ \cos 72^\circ} = 1 + \frac{4\sin 36^\circ}{\sin 144^\circ} =$$

$$= 1 + \frac{4\sin 36^\circ}{\sin(180^\circ - 36^\circ)} = 1 + \frac{4\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 1 + 4 = 5.$$

Итак, $A = 5$.

Пример 6

Упростим выражение $A = \dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha}$.

Сгруппируем слагаемые в числителе и знаменателе дроби A: $A = \dfrac{(\sin 2\alpha + \sin 8\alpha) + (\sin 4\alpha + \sin 6\alpha)}{(\cos 2\alpha + \cos 8\alpha) + (\cos 4\alpha + \cos 6\alpha)}$. Преобразуем суммы функций в скобках в произведения: $A = \dfrac{2\sin 5\alpha \cos 3\alpha + 2\sin 5\alpha \cos\alpha}{2\cos 5\alpha \cos 3\alpha + 2\cos 5\alpha \cos\alpha} =$

$= \dfrac{2\sin 5\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha)}{2\cos 5\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha)} = \dfrac{\sin 5\alpha}{\cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha$. Поэтому $A = \operatorname{tg} 5\alpha$.

Пример 7

Упростим выражение $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4\alpha}}$, если $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Начнем преобразования с внутреннего радикала и используем формулы понижения степени: $2 + 2\cos 4\alpha = 2(1 + \cos 4\alpha) =$ $= 2 \cdot 2\cos^2 2\alpha = 4\cos^2 2\alpha$, тогда $\sqrt{2 + 2\cos 4\alpha} = \sqrt{4\cos^2 2\alpha} = |2\cos 2\alpha| =$

$$= \begin{cases} 2\cos 2\alpha, \text{ если } \cos 2\alpha \ge 0, \\ -2\cos 2\alpha, \text{ если } \cos 2\alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\cos 2\alpha, \text{ если } \alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ -2\cos 2\alpha, \text{ если } \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Теперь упростим: $A = \sqrt{2 + |2\cos 2\alpha|} = \begin{cases} \sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}, \text{ если } \alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}, \text{ если } \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} =$

$= \begin{cases} \sqrt{4\cos^2\alpha}, \text{ если } \alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ \sqrt{4\sin^2\alpha}, \text{ если } \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} = \begin{cases} 2\cos\alpha, \text{ если } \alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ 2\sin\alpha, \text{ если } \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$ В последнем случае знак модуля не ставится, так как $\cos\alpha \ge 0$ и $\sin\alpha \ge 0$.

Итак, $A = \begin{cases} 2\cos\alpha, \text{ если } \alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ 2\sin\alpha, \text{ если } \alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

Пример 8

Докажем, что $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$, и вычислим $4\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

Обозначим доказываемое выражение A и запишем: $A=4\sin\alpha(\sin 60^\circ\cos\alpha-\cos 60^\circ\sin\alpha)(\sin 60^\circ\cos\alpha+\cos 60^\circ\sin\alpha)=$

$$=4\sin\alpha[(\sin 60^\circ\cos\alpha)^2-(\cos 60^\circ\sin\alpha)^2]=4\sin\alpha\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2\right]=$$

$$=4\sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)=\sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$

$$=\sin\alpha[3(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha]=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\sin 3\alpha.$$

В доказанном тождестве положим $\alpha=10^\circ$, тогда $4\sin 10^\circ\sin(60^\circ-10^\circ)\sin(60^\circ+10^\circ)=4\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=$

$$=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Пример 9

Упростим выражение $A=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{tg}16\alpha+$ $+32\operatorname{ctg}32\alpha$.

Проведем преобразования с конца этого выражения: $16\operatorname{tg}16\alpha+$

$$+32\operatorname{ctg}32\alpha=16\frac{\sin 16\alpha}{\cos 16\alpha}+32\frac{\cos 32\alpha}{\sin 32\alpha}=16\frac{\sin 16\alpha}{\cos 16\alpha}+32\frac{\cos^2 16\alpha-\sin^2 16\alpha}{2\sin 16\alpha\cos 16\alpha}=$$

$$=16\frac{\sin^2 16\alpha+\cos^2 16\alpha-\sin^2 16\alpha}{\sin 16\alpha\cos 16\alpha}=16\frac{\cos^2 16\alpha}{\sin 16\alpha\cos 16\alpha}=16\frac{\cos 16\alpha}{\sin 16\alpha}=16\operatorname{ctg}16\alpha.$$

Полностью аналогично продолжаем цепочку равенств: $8\operatorname{tg}8\alpha+16\operatorname{ctg}16\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$, $4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha$, $2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$.

Итак, $A=\operatorname{ctg}\alpha$.

Пример 10

Вычислим $\arcsin\cos[2\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)]$.

Обозначим $\alpha=\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}-1$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=$ $=\sqrt{2}+1$. Найдем $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-(\sqrt{2}+1)^2}{1+(\sqrt{2}+1)^2}=\frac{1-2-2\sqrt{2}-1}{1+2+2\sqrt{2}+1}=$

$=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{-2(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ Теперь легко найти $\arcsin(\cos 2\alpha)=\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}.$

III. Задание на уроках и на дом

1. Известно, что A, B, C – внутренние углы треугольника ABC. Докажите равенство:

а) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

б) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$;

в) $\dfrac{\sin C}{\cos A\cdot\cos B}=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B$;

г) $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=1.$

2. Найдите значение выражения $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$.

Ответ: $\dfrac{a^2-1}{2}.$

3. Найдите значение выражения $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=a$.

Ответ: $\dfrac{3a-a^3}{2}.$

4. Найдите $\operatorname{ctg}\beta$, если $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{p}{q}.$

Ответ: $\dfrac{p+q}{p-q}\operatorname{ctg}\alpha.$

5. Найдите $\operatorname{tg}\beta$, если $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{p}{q}.$

Ответ: $\dfrac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha.$

6. Вычислите:

а) $\cos\dfrac{\pi}{33}\cos\dfrac{2\pi}{33}\cos\dfrac{4\pi}{33}\cos\dfrac{8\pi}{33}\cos\dfrac{16\pi}{33}$;

б) $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}$.

Ответы: а, б) $\frac{1}{32}$.

7. Найдите наименьшее значение выражения при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$:

а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$;

б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

Ответы: а) $\frac{1}{4}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$; б) $\frac{1}{2}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8. Найдите сумму:

а) $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + ... + \cos(2n-1)\alpha$;

б) $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + ... + \cos^2 n\alpha$;

в) $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + ... + \sin^2 n\alpha$.

Ответы: а) $\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$; б) $\frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{n}{b}$;

в) $\frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

9. Вычислите:

а) $\text{ctg}\left(\frac{11}{4}\pi + \frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right) + \text{ctg}\left(\frac{11\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)$;

б) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right) + \text{tg}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)$;

в) $\frac{1}{4} - \cos^4\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$;

г) $\frac{1}{4} - \cos^4\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

д) $\arccos(\cos(2\,\text{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$;

е) $\arcsin(\cos(2\,\text{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$;

ж) $\sin^2\left[\text{arcctg}\frac{1}{2} - \text{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$;

з) $\text{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$;

и) $\text{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5} - 2\,\text{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

к) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

л) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

Ответы: а) $-\frac{a}{b}$; б) $-\frac{b}{a}$; в, г) $\frac{6}{25}$; д) $\frac{3\pi}{4}$; е) $-\frac{\pi}{4}$; ж) 0,98; з) $-\frac{119}{120}$; и) –2; к, л) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

IV. Подведение итогов уроков

Уроки 51–52. Тригонометрические уравнения (факультативное занятие)

Цель: систематизировать способы решения тригонометрических уравнений.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Напишите формулу для: а) $\sin x + \sin y$; б) $\cos x \cos y$.

2. Упростите выражение $\dfrac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}$.

3. Постройте график уравнения $\sin y = \cos x$.

Вариант 2

1. Напишите формулу для: а) $\cos x + \cos y$; б) $\sin x \sin y$.

2. Упростите выражение $\dfrac{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha}{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha}$.

3. Постройте график уравнения $\cos y = \sin x$.

III. Изучение нового материала

В главах 2 – 4 рассматривались различные тригонометрические уравнения. Учитывая, что на практике уравнения встречаются очень часто, необходимо *систематизировать, обобщить* и *дополнить* изученный материал.

Более *сложные* тригонометрические уравнения решаются путем их *сведения к простейшим*. Методы сведения уравнений к простейшим, по сути, и являются способами их решения. Рассмотрим их.

1. Замена неизвестной

Если в уравнении тригонометрические функции удается выразить через *одну* функцию, то эту функцию можно выбрать в качестве *новой неизвестной*.

Пример 1

Решим уравнение $5\cos^2 x - 3\cos x = 2$.

Введем новую неизвестную $\cos x = y$ и получим квадратное уравнение $5y^2 - 3y - 2 = 0$, корни которого $y_1 = 1$ и $y_2 = -\frac{2}{5}$. Вернемся к старой переменной. Имеем два простейших уравнения:

а) $\cos x = 1$, его решения $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

б) $\cos x = -\frac{2}{5}$, его решения $x = \pm\arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$.

Достаточно часто для приведения уравнения к одной переменной используют *основное тригонометрическое тождество*.

Пример 2

Решим уравнение $5 - 7\sin x = 3\cos^2 x$.

Используя основное тригонометрическое тождество, выразим $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и запишем в виде $5 - 7\sin x = 3(1 - \sin^2 x)$ или $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$. Введем новую неизвестную $y = \sin x$ и получим квадратное уравнение $3y^2 - 7y + 2 = 0$, корни которого $y_1 = \frac{1}{3}$ и $y_2 = 2$. Вернемся к старой неизвестной x. Получим простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin x = \frac{1}{3}$, его решения $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\sin x = 2$, решений не имеет, так как $\sin x \le 1$.

На экзаменах регулярно встречаются *однородные* уравнения различных степеней. Ознакомимся с ними.

Пример 3

Решим уравнение $2\sin x + 5\cos x = 0$.

Левая часть уравнения содержит функции $\sin x$ и $\cos x$, входящие в одной и той же первой степени, правая часть равна нулю. Поэтому данное уравнение называют *однородным уравнением первой степени*.

Проверим, что $\cos x = 0$ не удовлетворяет уравнению. Действительно, при подстановке $\cos x = 0$ в уравнение получим: $2\sin x = 0$ или $\sin x = 0$. Но если $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$, то не выполняется основное тригонометрическое тождество. Следовательно (от противного), $\cos x \neq 0$.

Разделим все члены данного уравнения на $\cos x$ (так как $\cos x \neq 0$). Получим уравнение $2\frac{\sin x}{\cos x}+5=0$ или $2\operatorname{tg}x+5=0$, откуда $\operatorname{tg}x=-2{,}5$. Решения этого простейшего уравнения $x=\operatorname{arctg}(-2{,}5)+\pi n=-\operatorname{arctg}2{,}5+\pi n$, $n\in Z$. Учтено, что функция арктангенс является нечетной.

Пример 4

Решим уравнение $6\sin^2 2x-5\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=0$.

Левая часть уравнения содержит функции $\sin 2x$ и $\cos 2x$, входящие в одной и той же второй степени (при этом произведение $\sin 2x\cos 2x$ приписывается степень, равная сумме степеней множителей, т. е. тоже вторая), правая часть равна нулю. Поэтому данное уравнение называют *однородным уравнением второй степени*.

Проверим, что $\cos 2x = 0$ не удовлетворяет уравнению. При подстановке $\cos 2x = 0$ в уравнение получим: $6\sin^2 2x=0$ или $\sin 2x = 0$. Так как $\cos 2x = 0$ и $\sin 2x = 0$, то не выполняется основное тригонометрическое тождество. Следовательно, $\cos 2x \neq 0$. Поэтому разделим все члены данного уравнения на $\cos^2 2x$ и получим:

$$6\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}-5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+1=0 \text{ или } 6\operatorname{tg}^2 2x-5\operatorname{tg}2x+1=0.$$

Введем новую переменную $y=\operatorname{tg}2x$. Имеем квадратное уравнение $6y^2-5y+1=0$, корни которого $y_1=\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{1}{3}$. Вернемся к старой неизвестной и получим простейшие уравнения:

а) $\operatorname{tg}2x=\frac{1}{2}$, тогда $2x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$ и $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$;

б) $\operatorname{tg}2x=\frac{1}{3}$, тогда $2x=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$ и $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

Достаточно часто уравнения, формально не являющиеся однородными, можно *свести к однородным*, используя основное тригонометрическое тождество.

Пример 5

Решим уравнение $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=1$.

Левая часть уравнения представляет собой *однородный* многочлен *второй степени* по переменным $\sin x$ и $\cos x$. Однако в правой части уравнения вместо числа 0 стоит число 1. Поэтому, используя *основное тригонометрическое тождество*, запишем число 1 также *в виде однородного многочлена второй степени*: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$. Тогда получим уравнение $2\sin^2 x+5\sin x\cos x+5\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$ или $\sin^2 x+5\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$. Такое уравнение уже является однородным и решается аналогично предыдущему примеру.

Обычным способом убеждаемся, что в таком уравнении $\cos x \neq 0$ и делим все члены уравнения на $\cos^2 x$. Получим уравнение $\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+4=0$. Введем новую переменную $y = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное уравнение $y^2+5y+4=0$, корни которого $y_1 = -1$ и $y_2 = -4$. Вернемся к старой неизвестной. Имеем простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\operatorname{tg} x=-1$, его решения $x=\operatorname{arctg}(-1)+\pi n=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

б) $\operatorname{tg} x = -4$, его решения $x=\operatorname{arctg}(-4)+\pi k=-\operatorname{arctg}4+\pi k,\ k\in Z$ (была учтена нечетность функции арктангенса).

На практике распространены *симметричные* уравнения, т. е. уравнения, которые *не меняются при замене* $\sin x$ *на* $\cos x$ *и наоборот* (с точностью до перестановки множителей и слагаемых). Такие уравнения решаются с помощью замены $y=\sin x+\cos x$ (простейший симметричный двучлен).

Пример 6

Решим уравнение $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=4\sin x\cos x$.

Если заменить $\sin x$ на $\cos x$ и наоборот, то получим уравнение $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=4\cos x\sin x$, которое совпадает с данным с точностью до перестановки слагаемых и множителей. По определению данное уравнение является *симметричным*.

Введем новую переменную $y=\sin x+\cos x$. Возведем это равенство в квадрат: $y^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$ или $y^2=1+2\sin x\cos x$, откуда $\sin x\cos x=\dfrac{y^2-1}{2}$. Подставив выражения $\sin x+\cos x=y$ и $\sin x\cos x=\dfrac{y^2-1}{2}$ в данное уравнение, получим квадратное уравнение $\sqrt{2}y=4\cdot\dfrac{y^2-1}{2}$ или $2y^2-\sqrt{2}y-2=0$. Его корни

$y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+16}}{4}=\frac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{4}$, т. е. $y_1=\sqrt{2}$ и $y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Теперь вернемся к старой неизвестной x. При этом *удобнее* использовать соотношения $\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$ и $2\sin x\cos x=y^2-1$, т. е. $\sin 2x=y^2-1$.

а) Для $y=\sqrt{2}$ имеем уравнение $\sin 2x=(\sqrt{2})^2-1=1$. Его решения $2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

б) Для $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ получим уравнение $\sin 2x=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$. Его решения $2x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k=(-1)^k\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k=$ $=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, откуда $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$.

Аналогичным способом можно решать уравнения, *похожие по структуре на симметричные уравнения.*

Пример 7

Решим уравнение $\sin x-\cos x=1+\sin x\cos x$.

Формально данное уравнение не является симметричным, но имеет похожую структуру. Поэтому решим его аналогично предыдущему примеру.

Введем новую переменную $y=\sin x-\cos x$. Возведем в квадрат это равенство и получим: $y^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x$ или $y^2=1-2\sin x\cos x$, откуда выразим $\sin x\cos x=\frac{1-y^2}{2}$. Подставим y и y^2 в данное уравнение. Имеем квадратное уравнение $y=1+\frac{1-y^2}{2}$ или $y^2+2y-3=0$, корни которого $y_1=1$ и $y_2=-3$.

Вернемся к старой переменной. Для этого используем соотношение $\sin x\cos x=\frac{1-y^2}{2}$, откуда $\sin 2x=1-y^2$.

а) Для $y=1$ получим уравнение $\sin 2x=0$, тогда $2x=\pi n$ и $x=\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

б) Для $y = -3$ получим уравнение $\sin 2x = -8$, которое решений не имеет, так как $|\sin 2x| \le 1$.

В ряде случаев при решении уравнений полезно использовать *универсальную тригонометрическую подстановку*. Она использует формулы (выведите самостоятельно) $\sin x = \dfrac{2y}{1+y^2}$, $\cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{2y}{1-y^2}$ (где $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$) и позволяет *выражать* функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ через *одну и ту же функцию* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Пример 8

Решим уравнение $5\sin x + 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 0$.

Используем универсальную тригонометрическую подстановку и получим уравнение $5 \cdot \dfrac{2y}{1+y^2} + 2y = 0$ (где $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$) или $y(y^2+6) = 0$, которое имеет единственный корень $y = 0$. Вернемся к старой неизвестной и получим уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 0$, откуда $\dfrac{x}{2} = \pi n$ и $x = 2\pi n$, где $n \in Z$.

Пример 9

Решим уравнение $(1+\operatorname{tg} x)(1-\sin 2x) = 1 - \operatorname{tg} x$.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $y = \operatorname{tg} x$ и получим уравнение $(1+y)\left(1 - \dfrac{2y}{1+y^2}\right) = 1 - y$ или $(1+y)(1-y)^2 = (1-y)(1+y^2)$. Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители: $(1-y)((1+y)(1-y)-(1+y^2)) = 0$ или $(1-y)y^2 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 1$ и $y_2 = 0$.

Вернемся к старой переменной и получим простейшие уравнения:

а) $\operatorname{tg} x = 1$, его решения $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\operatorname{tg} x = 0$, его решения $x = \pi k$, $k \in Z$.

Перейдем к следующему способу решения тригонометрических уравнений.

2. Разложение на множители

Если одну из частей уравнения удается *разложить на множители*, а другая часть равна нулю, то исходное уравнение сводится к *совокупности* более *простых уравнений*.

Пример 10

Решим уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Сгруппируем члены уравнения: $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$ — и преобразуем сумму синусов в произведение: $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$. Вынесем общий множитель в левой части за скобки и разложим ее на множители $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получим простейшие уравнения:

а) $\sin 2x = 0$, его решения $2x = \pi n$, и $x = \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$;

б) $2\cos x + 1 = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$, его решения $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k =$

$= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Пример 11

Решим уравнение $\sin x - \cos 3x = 0$.

Так как не существует формулы для разности разноименных функций, то с помощью формулы приведения превратим функцию синуса в косинуса: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 3x = 0$. Преобразуем разность косинусов в произведение: $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получим простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, его решения $2x - \frac{\pi}{4} = \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$, его решения $\frac{\pi}{4} + x = \pi k$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

Преобразование *суммы* тригонометрических функций *в произведение* в ряде задач удобно сочетать с обратным преобразованием *произведения* функций в сумму.

Пример 12

Решим уравнение $\cos x \cos 5x = \cos 3x \cos 7x$.

Прежде всего в каждой части уравнения преобразуем произведение косинусов в сумму функций: $\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 10x)$. После очевидных упрощений получаем: $\cos 6x = \cos 10x$. Из правой части уравнения перенесем член в левую часть: $\cos 6x - \cos 10x = 0$ и преобразуем разность косинусов в произведение функций: $2\sin 2x \sin 8x = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получим простейшие уравнения:

а) $\sin 2x = 0$, его решения $2x = \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$;

б) $\sin 8x = 0$, его решения $8x = \pi k$, откуда $x = \frac{\pi}{8}k$, где $k \in Z$.

Легко увидеть, что при $k = 4n$ решения $x = \frac{\pi}{8}k$ включают в себя решения $x = \frac{\pi}{2}n$. Поэтому все решения данного уравнения (случаи *а* и *б*) можно записать в виде $x = \frac{\pi}{8}k$, где $k \in Z$.

Разумеется, при разложении на множители тригонометрического выражения часто используются формулы для *функций кратных углов*.

Пример 13

Решим уравнение $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$.

Используем формулу для синуса двойного аргумента и получим: $\sqrt{3}\cos x + 2\sin x \cos x = 0$. Вынесем общий множитель за скобки: $\cos x(\sqrt{3} + 2\sin x) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получим уравнения:

а) $\cos x = 0$, его решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$;

б) $\sqrt{3} + 2\sin x = 0$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, его решения $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in Z$.

3. Понижение степени уравнения

Если в уравнение входят функции *в высоких степенях*, то полезно использовать формулы понижения степени (очевидно, что уравнение *меньшей* степени решать *проще*). Напомним такие формулы: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$. Каждая из этих формул позволяет заменить *выражение второй степени* на *соотношение первой степени* и тем самым *понизить степень уравнения.*

Пример 14

Решим уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Используем формулы понижения степени и запишем уравнение в виде $\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = 1$ или $\cos 4x + \cos 6x = 0$. Преобразуем сумму косинусов в произведение: $2\cos 5x \cos x = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получим простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\cos 5x = 0$, его решения $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n$, где $n \in Z$;

б) $\cos x = 0$, его решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

Пример 15

Решим уравнение $\cos 2x + (2\sin^2 x)^2 = (2\cos^2 x)^3$.

Для этого используем формулы понижения степени: $\cos 2x + (1-\cos 2x)^2 = (1+\cos 2x)^3$. Введем новую неизвестную $y = \cos 2x$ и получим алгебраическое уравнение $y + (1-y)^2 = (1+y)^3$, или $y + 1 - 2y + y^2 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3$, или $0 = y^3 + 2y^2 + 4y$, или $0 = y(y^2 + 2y + 4)$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения $y = 0$ и $y^2 + 2y + 4 = 0$ (это квадратное уравнение корней не имеет, так как его дискриминант отрицательный).

Вернемся к старой неизвестной x. Получим уравнение $\cos 2x = 0$, его решения $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, где $n \in Z$.

Достаточно часто в рассматриваемые уравнения входят *симметричные двучлены высокой степени*. Разумеется, степень таких двучленов необходимо понизить. Приведем некоторые *соотношения, понижающие степень* симметричных двучленов:

$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2x)=\frac{1}{4}(3+\cos 4x);$

$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x)=\frac{1}{8}(5+3\cos 4x);$

$\sin^8 x+\cos^8 x=1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\cos^2 2x+\frac{1}{8}\cos^4 2x.$

Пример 16

Решим уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin x\cos x=1\frac{3}{8}$.

Так как в уравнение входит выражение $2\sin x\cos x=\sin 2x$, то удобно и выражение $\sin^4 x+\cos^4 x$ также выразить через функцию $\sin 2x$. Получим уравнение $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\sin 2x=1\frac{3}{8}$ или $0=4\sin^2 2x-8\sin 2x+3$. Сделаем замену $y=\sin 2x$ и получим квадратное уравнение $0=4y^2-8y+3$, корни которого $y_1=\frac{1}{2}$ и $y_2=\frac{3}{2}$.

Вернемся к старой переменной и получим тригонометрические уравнения:

а) $\sin 2x=\frac{1}{2}$, его решения $2x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, откуда $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in Z$;

б) $\sin 2x=\frac{3}{2}$, решений нет, так как $\sin 2x\le 1$.

4. Введение вспомогательного угла

Этот способ основан на использовании формул для *синуса или косинуса суммы (разности) двух углов*. Они применяются при решении уравнений $a\sin x+b\cos x=c$ (где a, b, c – некоторые коэффициенты). Изложим суть этого способа.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ и получим: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Так как выполнены условия $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то можно считать $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$ (или наоборот). Из этих соотношений можно найти угол φ. Тогда уравнение имеет вид: $\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Это уравнение является простейшим и имеет решения только при $|c|\le\sqrt{a^2+b^2}$.

Пример 17

Решим уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$.

Найдем $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ и разделим все члены уравнения на 2. Получим $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}$. Будем считать, что $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ и $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Уравнение принимает вид: $\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2}$ или $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Решения этого уравнения $x+\frac{\pi}{3}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, откуда $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n\in Z$.

Заметим, что уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ можно преобразовать и по-другому. Для этого достаточно считать, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$. Тогда уравнение имеет вид: $\sin\alpha\sin x+$ $+\cos\alpha\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 18

Решим уравнение $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\cos 16x$.

Преобразуем левую часть уравнения. Вычислим $\sqrt{a^2+b^2}=$ $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ и разделим все члены уравнения на $\sqrt{2}$. Получим: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 10x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 10x=\cos 16x$. Будем считать, что $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Уравнение принимает вид: $\sin\frac{\pi}{4}\sin 10x + \cos\frac{\pi}{4}\cos 10x = \cos 16x$ или $\cos\left(10x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 16x$. Запишем уравнение в виде $\cos\left(10x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 16x = 0$ и преобразуем разность косинусов в произведение: $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(13x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получим два уравнения:

а) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$, его решения $3x + \frac{\pi}{8} = \pi n$, и $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}n$, где $n \in Z$;

б) $\sin\left(13x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$, его решения $13x - \frac{\pi}{8} = \pi k$, и $x = \frac{\pi}{104} + \frac{\pi}{13}k$, где $k \in Z$.

5. Ограниченность тригонометрических функций

При решении уравнений этого типа существенным является *ограниченность* функций синуса и косинуса, т. е. $|\sin x| \le 1$ и $|\cos x| \le 1$.

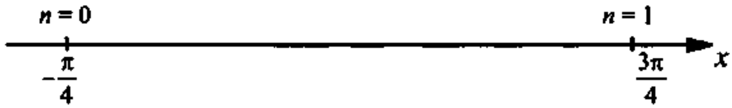
Пример 19

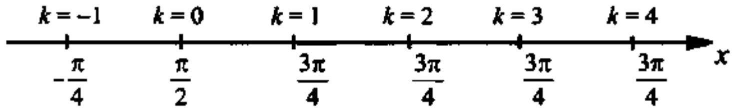
Решим уравнение $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$.

Очевидно, что в силу ограниченности функции синуса такое уравнение имеет решение в случае одновременного выполнения равенств $\begin{cases} \sin 2x = -1, \\ \sin 6x = 1. \end{cases}$ Решая уравнения этой системы, получим:

$$\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k. \end{cases}$$

Из этих решений необходимо выбрать общие, т. е. такие, при которых уравнение системы обращается в равенство. Нанесем на числовую ось решения x_1 и x_2 для нескольких значений n и k. На рисунке видно, что общие решения совпадают с x_1. Поэтому решения данного уравнения $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.





Пример 20

Решим уравнение $\sin^8 x + \cos^{23} x = 1$.

Оценим слагаемые, входящие в левую часть уравнения:

$\sin^8 x \le \sin^2 x$ (равенство выполняется в случае $\sin x = 0; \pm 1$);

$\cos^{23} x \le \cos^2 x$ (равенство выполняется в случае $\cos x = 0;\ 1$).

Сложим два неравенства одного знака (при этом знак неравенства сохраняется) и получим: $\sin^8 x + \cos^{23} x \le \sin^2 x + \cos^2 x$ или $\sin^8 x + \cos^{23} x \le 1$ (с учетом основного тригонометрического тождества). Таким образом, левая часть данного уравнения не больше 1. Поэтому данное уравнение может выполняться только в двух случаях: $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0. \end{cases}$ Очевидно, что первая система равносильна уравнению $\cos x = 1$ (его решения $x = 2\pi n$, где $n \in Z$), вторая система равносильна уравнению $\cos x = 0$ (его решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$).

Ограниченность функций синуса и косинуса используется и при решении *уравнений с несколькими неизвестными*.

Пример 21

Решим уравнение $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$.

Преобразуем обе части уравнения. В левой части учтем, что $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, в правой части выделим квадрат разности чисел. Получим уравнение $\dfrac{2\dfrac{\frac{\sin x}{2}}{\frac{\cos x}{2}}}{1+\dfrac{\frac{\sin^2 x}{2}}{\frac{\cos^2 x}{2}}}=(y^2-4y+4)+1$, или $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=$ $=(y-2)^2+1$, или $\sin x=(y-2)^2+1$. Учтем, что $\sin x \le 1$, $(y-2)^2+1\ge 1$. Поэтому данное уравнение имеет решения только в случае $\begin{cases}\sin x=1,\\(y-2)^2+1=1,\end{cases}$ откуда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ (где $n\in Z$) и $y=2$.

6. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

На экзаменах такие уравнения встречаются значительно *реже* уравнений, рассмотренных ранее. Их решение, как правило, основано *на определении* обратных тригонометрических функций и знании их *свойств*.

Пример 22

Решим уравнение $2\arcsin x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{9\arcsin x}$.

Так как в уравнение входит только функция arcsin x, то введем новую неизвестную y = arcsin x и получим рациональное уравнение $2y=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{9y}$ или $18y^2-3\pi y-\pi^2=0$. Корни этого уравнения $y_1=\frac{\pi}{3}$ и $y_2=-\frac{\pi}{6}$. Оба корня входят в область значений функции arcsin x, т. е. $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Вернемся к старой неизвестной и получим уравнения:

а) $\arcsin x=\frac{\pi}{3}$, тогда $x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin x=-\frac{\pi}{6}$, откуда $x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

Итак, уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Пример 23

Решим уравнение $2\operatorname{arctg}(2x+1) = \arccos x$.

Так как в правую часть уравнения входит функция $\arccos x$, то найдем обратную функцию косинуса от обеих частей приведенного равенства. Получим уравнение $\cos(2\operatorname{arctg}(2x+1)) = \cos(\arccos x)$ или $\cos(2\operatorname{arctg}(2x+1)) = x$. Чтобы упростить левую часть, обозначим $\alpha = \operatorname{arctg}(2x+1)$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 2x+1$. Вычислим $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} = \frac{-2x(x+1)}{2x^2+2x+1}$. Тогда данное уравнение имеет вид: $\frac{-2x(x+1)}{2x^2+2x+1} = x$, или $-2x(x+1) = x(2x^2+2x+1)$, или $0 = x(2x^2+4x+3)$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получим: $x = 0$ или $2x^2+4x+3=0$ (это уравнение корней не имеет, так как дискриминант отрицательный). Итак, уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

IV. Задание на уроках и на дом

1. Решите уравнение, используя способ введения вспомогательного угла:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$;

в) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos 2x - \sin 2x = -\sqrt{2}$;

д) $3\sin x + 4\cos x = -5$;

е) $\sin 2x + 7\cos 2x = 5$.

Ответы: а) $2\pi n + \frac{\pi}{3}$; $2\pi n$; б) $2\pi n + \frac{2\pi}{3}$; в) $(-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n$; г) $\frac{3}{8}\pi + \pi n$; д) $-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi n$; е) $\pm\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi n$, где $n \in Z$.

2. Решите уравнение, преобразуя сумму и разность тригонометрических функций в произведение:

а) $\sin x - \cos 3x = 0$;

б) $\cos\frac{x}{3} - \sin x = 0$;

в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin 5x$;

г) $\sqrt{3}\sin 4x + 2\cos 2x + \cos 4x = 0$;

д) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

е) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Ответы: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$; б) $\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi n$; $\frac{3}{4}\pi + 3\pi n$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$; $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n$; г) $\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}n$, $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n$; д) $\frac{2\pi}{5}n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pi + 2\pi n$; е) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$.

3. Решите уравнение, преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму:

а) $\cos x \cos 5x = \cos 3x \cos 7x$;

б) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$;

в) $2\sin 5x \sin 2x = \cos x$;

г) $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$;

д) $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}$;

е) $4\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3x = 1$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{8}n$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$; $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$; г) $\frac{\pi}{2}n$; $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}n$; д) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$; е) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$; $\frac{2\pi}{3}n$, где $n \in Z$.

4. Решите уравнение, используя формулы понижения степени:

а) $\cos x - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$;

б) $2\sin^2 x - 1 = \sin 3x$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$;

г) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$;

д) $\sin^4\frac{x}{3} + \cos^4\frac{x}{3} = \frac{5}{8}$;

е) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$;

ж) $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$;

з) $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$.

Ответы: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$; г) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n$; д) $\pm\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}n$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; ж) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$; з) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in Z$.

5. Решите уравнение, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

а) $\sin x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$;

б) $1 + \cos x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$;

в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$;

г) $4\sin 2x + 3\cos 2x = 5$;

д) $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$;

е) $1 + \cos x - \sin x = 0$.

Ответы: а) $2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $2\pi n; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n$; е) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

6. Решите уравнение, используя формулы для функций кратных углов:

а) $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$;

б) $\cos x + \cos 2x = \sin x$;

в) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{8}$;

г) $(\cos 2x - 1)\operatorname{ctg}^2 x = -3\sin x$;

д) $\sin 3x - 4\sin x \cos 2x = 0$;

е) $3\sin x + 3\cos x = \cos 3x - \sin 3x$;

ж) $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$;

з) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

в) $(-1)^n \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} n$; г) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; д) πn; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$;

е) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; ж) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n$; $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} n$; з) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

7. Решите уравнение, используя ограниченность функций синуса и косинуса:

а) $\cos 10x - \cos 7x = 2$;

б) $\sin^4 x + \cos^{19} = 1$;

в) $\sqrt[4]{\sin 2x} + \sqrt[6]{\cos 2x} = 1$.

Ответы: а) $\pi + \pi n$; б) $2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) πn; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$.

8. Решите уравнение, содержащее обратные тригонометрические функции:

а) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\cos(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $\arcsin x + 3\arccos x = \frac{7}{6}\pi$;

г) $2\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = \frac{5}{4}\pi$;

д) $2\arcsin^2 x - \arcsin x - 8 = 0$;

е) $\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{3} - 4\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - 4 = 0$;

ж) $\operatorname{arctg}^2(3x+2) + 2\operatorname{arctg}(3x+2) = 0$;

з) $3\operatorname{arctg}^2 x - 4\pi\operatorname{arctg} x + \pi^2 = 0$;

и) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

к) $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

л) $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \arccos(2x^2-1)$;

м) $2\arccos x = \arccos(2x^2-1)$;

н) $2\arcsin(3x-1) = \arccos(2x^2-3x+1{,}5)$;

о) $2\arccos x + \arccos(3x+1) = 2\pi$.

Ответы: а) $\frac{1}{2}$; б) -1; в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) $-\sin 1{,}5$; е) $-3\operatorname{tg} 1$; ж) $-1{,}5$; з) $\sqrt{3}$; и) $[0;\ 1]$; к) $(0;\ 1)$; л) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$; м) $[0;\ 1]$; н) $\frac{1}{2}$; о) $-\frac{1}{2}$.

V. Подведение итогов уроков

Урок 53. Тригонометрические неравенства (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть способы решения тригонометрических неравенств.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите уравнение:

1) $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$;

2) $5 - 7\sin x = 3\cos^2 x$;

3) $12\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$.

Вариант 2

Решите уравнение:

1) $\sin 3x + \sin 7x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$;

2) $\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$;

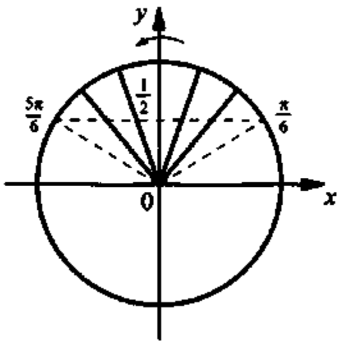
3) $3\sin 2x = 4(\sin x + \cos x + 1)$.

III. Изучение нового материала

Решение тригонометрических неравенств (как и уравнений), как правило, сводится к решению *простейших* тригонометрических *неравенств*. Поэтому прежде всего остановимся на решении таких неравенств. Их удобно решать, используя *единичную окружность*.

Пример 1

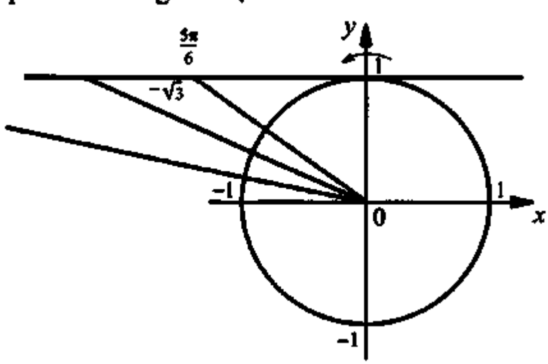
Решим неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.



На единичной окружности по оси ординат отложим значение $\sin x = \frac{1}{2}$ и построим соответствующие углы $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (углы откладываются против часовой стрелки и являются положительными). На рисунке видно, что неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$ удовлетворяют значения $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Учтем, что период функции синуса составляет 2π, и получим решение данного неравенства $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, или $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

Пример 2

Решим неравенство $\operatorname{ctg} x \le -\sqrt{3}$.

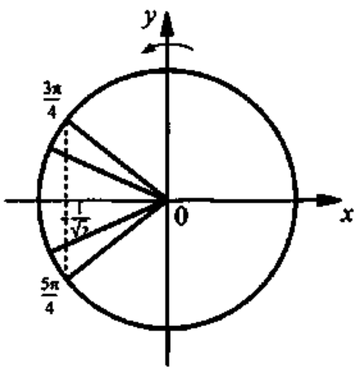


На оси котангенсов для единичной окружности отложим значение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ и построим соответствующий угол $x = \frac{5\pi}{6}$. Видно, что неравенству $\operatorname{ctg} x \le -\sqrt{3}$ удовлетворяют значения $\frac{5\pi}{6} \le x < \pi$. Учитывая период функции котангенса (равный π), получим решение данного неравенства: $\frac{5\pi}{6} + \pi n \le x < \pi + \pi n$, или $x \in \left[\frac{5\pi}{6} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, где $n \in Z$.

В случае *сложного аргумента* тригонометрической функции рекомендуется обозначить его *новой переменной*, решить для него неравенство, а затем вернуться к старой неизвестной.

Пример 3

Решим неравенство $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Обозначим аргумент косинуса $y = 3x - \frac{\pi}{6}$ и получим простейшее тригонометрическое неравенство $\cos y \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Решим это неравенство. На единичной окружности по оси абсцисс отложим значение $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и построим соответствующие углы $y_1 = \frac{3\pi}{4}$ и $y_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Тогда неравенству $\cos y \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяют значения $\frac{3\pi}{4} \le y \le \frac{5\pi}{4}$.

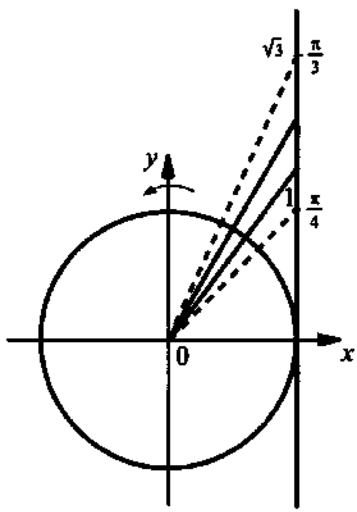
Учтем периодичность функции $\cos y$ и получим решения $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le y \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

Теперь вернемся к старой неизвестной x и получим двойное линейное неравенство $\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le 3x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{4}+2\pi n.$ Ко всем частям неравенства прибавим число $\frac{\pi}{6}$. Отсюда $\frac{11}{12}\pi+2\pi n\le 3x\le\frac{17}{12}\pi+2\pi n.$ Все части неравенства разделим на положительное число 3. При этом знак неравенства сохраняется. Получим: $\frac{11}{36}\pi+\frac{2}{3}\pi n\le x\le\frac{17}{36}\pi+\frac{2}{3}\pi n,$ или $x\in\left[\frac{11}{36}\pi+\frac{2}{3}\pi n;\ \frac{17}{36}\pi+\frac{2}{3}\pi n\right]$, где $n\in Z$.

Если неравенство *не* является *простейшим*, то используя *преобразования*, аналогичные тем, которые применялись для уравнений, сводим неравенство к простейшему.

Пример 4

Решим неравенство $\mathrm{tg}^2 x-(1+\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3}<0.$

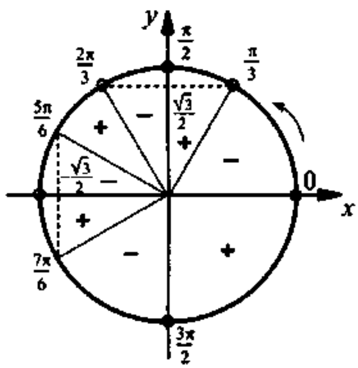


Введем новую переменную $y=\mathrm{tg}\,x$ и получим квадратное неравенство $y^2-(1+\sqrt{3})y+\sqrt{3}<0.$ Это неравенство имеет решение $1<y<\sqrt{3}$. Вернемся к старой неизвестной x и получим двойное неравенство $1<\mathrm{tg}\,x<\sqrt{3}$. На единичной окружности по оси тангенсов отложим значения 1 и $\sqrt{3}$ и построим соответствующие углы $x_1=\frac{\pi}{4}$ и $x_2=\frac{\pi}{3}$. Тригонометрическому неравенству удовлетворяют значения $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$. Учтем периодичность функции тангенса и получим решение данного неравенства: $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, или $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, где $n \in Z$.

Также при решении тригонометрических неравенств можно использовать *метод интервалов* (который является универсальным для всех неравенств).

Пример 5

Решим неравенство $\frac{2\cos x + \sqrt{3}}{\sin 2x(2\sin x - \sqrt{3})} \le 0$.



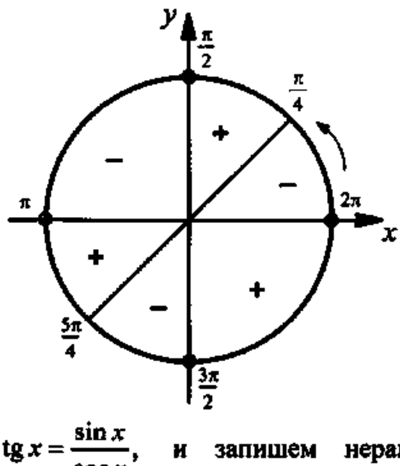
На единичной окружности отметим значения x, при которых обращается в нуль числитель $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ (откуда $x = \frac{5\pi}{6}$ и $x = \frac{7\pi}{6}$) и знаменатель $\sin 2x = 0$ (тогда $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ (откуда $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{2\pi}{3}$) дроби. Определим знак этой дроби, например, при $x = \frac{\pi}{6}$ и получим:

$\frac{2\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}\left(2\sin\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sqrt{3})} < 0$. Учтем, что при переходе через отмеченные значения x знак неравенства меняется на противоположный. Построим диаграмму знаков данной дроби. Также учтем значения x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль (они отмечены кружками). Теперь легко выписать решения неравенства: $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6} \le x < \pi$, $\frac{7\pi}{6} \le x < \frac{3\pi}{2}$. Учитывая, что через $2\pi n$ (где $n \in Z$) ситуация повторяется, выпишем решения данного неравенства: $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup$ $\cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right) \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

При наличии в неравенстве функций *тангенса и котангенса* удобно *перейти к функциям синуса и косинуса* и использовать рассмотренный метод интервалов.

Пример 6

Решим неравенство $\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x} \ge 0$.



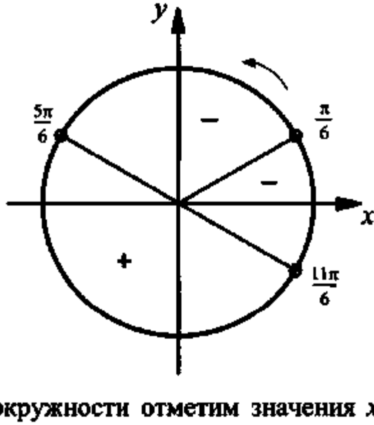
Учтем, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, и запишем неравенство в виде $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x} \ge 0$. Отметим на единичной окружности значения x, при которых обращается в нуль числитель $\sin x - \cos x = 0$ (откуда $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{5\pi}{4}$) и знаменатель $\sin x \cos x = 0$ (тогда $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$ и

$x = 2\pi$) дроби. Определим знак данной дроби, например, при $x = \frac{\pi}{3}$ и получим: $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} > 0$. Учтем, что при переходе через отмеченные значения x знак неравенства меняется на противоположный. Построим диаграмму знаков данной дроби. Учтем также значения x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль (они отмечены кружками). С учетом периодичности функций синуса и косинуса, входящих в неравенство, запишем окончательное решение данного неравенства $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right)$, где $n \in Z$.

При использовании метода интервалов необходимо помнить, что тригонометрическое выражение может иметь *кратные корни*. При переходе через *корень нечетной кратности знак* выражения *меняется на противоположный*, при проходе через *корень четной кратности знак сохраняется*.

Пример 7

Решим неравенство $\dfrac{2\sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}} \geq 0$.



На единичной окружности отметим значения x, при которых обращается в нуль числитель $2\sin x - 1 = 0$ (откуда $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$) и знаменатель $2\cos x-\sqrt{3}=0$ (тогда $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{11\pi}{6}$). Учтем, что $x=\frac{\pi}{6}$ – корень второй (четной) кратности и при переходе через него знак дроби не меняется. Определим знак выражения, например, при $x=0$ и получим: $\frac{2\cdot 0-1}{2\cdot 1-\sqrt{3}}<0$. Построим диаграмму знаков данной дроби. Учтем значения x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль (они отмечены кружками). С учетом периодичности функций, входящих в неравенство, запишем его решения: $x\in\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$, где $n\in Z$.

IV. Задание на уроке и на дом

Решите неравенство:

1) $3\sin^2 x-2\sin x-1\geq 0$;
2) $35\cos^2 x+2\cos x-1<0$;
3) $\sin x>\sqrt{5}\sin\frac{x}{2}$;
4) $\cos x<1+\cos 2x$;
5) $2\cos^4 5x\leq\frac{1}{2}+\cos 10x$;
6) $\cos 8x-2{,}5<2\sqrt{3}\sin 4x$;
7) $\sqrt{2-\operatorname{tg}x}>\operatorname{tg}x$;
8) $\sqrt{5-2\sin x}\geq 6\sin x-1$;
9) $\frac{1+\cos x}{1+\sin x}>1$;
10) $\frac{1+\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{tg}x}<2$.

Ответы: 1) $(2n-1)\pi+\arcsin\frac{1}{3}\leq x\leq 2\pi n-\arcsin\frac{1}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$;

2) $\pi(2n-1)+\arccos\frac{1}{5}<x<2\pi n-\arccos\frac{1}{7}$,

$2\pi n+\arccos\frac{1}{7}<x<\pi(2n+1)-\arccos\frac{1}{5}$;

3) $2\pi(2n+1)<x<2\pi(2n+2)$;

4) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi n$;

5) $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{10}n$;

6) $x\neq(-1)^{n+2}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}$;

7) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n$;

8) $-\frac{7}{6}\pi+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{6}+2\pi n$;

9) $-\frac{3}{4}\pi-2\pi n<x<-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{4}+2\pi n$;

10)

$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n.$

V. Подведение итогов урока

Уроки 54–55. Системы тригонометрических уравнений (факультативное занятие)

Цель: рассмотреть наиболее типичные системы тригонометрических уравнений и способы их решения.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

Решите неравенство:

а) $3\sin^2 x-5\sin x+\cos^2 x+1\le 1$;

б) $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\ge 1$;

в) $\frac{\operatorname{tg}x-\sqrt{3}}{2\sin 2x+\sqrt{2}}\ge 0$.

Вариант 2

Решите неравенство:

а) $\cos^2 x-5\cos x-\sin^2 x-2\ge 0$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\le -1$;

в) $\frac{\operatorname{ctg}2x+\sqrt{3}}{2\cos x-1}\le 0$.

III. Изучение нового материала

На экзаменах системы тригонометрических уравнений встречаются гораздо *реже* тригонометрических уравнений и неравенств. Четкой *классификации* систем тригонометрических уравнений *не существует*. Поэтому условно разобьем их на группы и рассмотрим *способы решения* этих задач.

1. Простейшие системы уравнений

К ним отнесем системы, в которых или *одно* из уравнений *является линейным*, или *уравнения* системы *могут быть решены независимо* друг от друга.

Пример 1

Решим систему уравнений $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2}, \\ 5 + 7\cos x = 3\cos^2 y. \end{cases}$

Так как первое *уравнение* является *линейным*, то выразим из него переменную $x = \dfrac{\pi}{2} + y$ и подставим во второе уравнение: $5 + 7\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + y\right) = 3\cos^2 y$. Используем формулу приведения и основное тригонометрическое тождество. Получим уравнение $5 - 7\sin y = 3(1 - \sin^2 y)$ или $3\sin^2 y - 7\sin y + 2 = 0$. Введем новую переменную $t = \sin y$. Имеем квадратное уравнение $3t^2 - 7t + 2 = 0$, корни которого $t_1 = \dfrac{1}{3}$ и $t_2 = 2$ (не подходит, так как $\sin y \le 1$). Вернемся к старой неизвестной и получим уравнение $\sin y = \dfrac{1}{3}$, решение которого $y = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n$, где $n \in Z$. Теперь легко найти неизвестную: $x = \dfrac{\pi}{2} + y = \dfrac{\pi}{2} + (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n$. Итак, система уравнений имеет решения $\left(\dfrac{\pi}{2} + (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n; (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi n\right)$, где $n \in Z$.

Пример 2

Решим систему уравнений $\begin{cases} \sin(x - y) = 0, \\ \cos(x + y) = 1. \end{cases}$

Уравнения системы *независимы*. Поэтому можно записать решения каждого уравнения. Получим: $\begin{cases} x - y = \pi n, \\ x + y = 2\pi k, \end{cases}$ где $n, k \in Z$. Почленно сложим и вычтем уравнения этой системы линейных уравнений и найдем: $\begin{cases} 2x = \pi(n+2k), \\ 2y = \pi(2k-n), \end{cases}$ откуда $x = \frac{\pi}{2}(n+2k)$, $y = \frac{\pi}{2}(2k-n)$.

Обратим внимание на то, что в силу независимости уравнений при нахождении $x - y$ и $x + y$ должны быть указаны разные целые числа n и k. Если бы вместо k было также поставлено n, то решения имели бы вид: $x = \frac{3\pi}{2}n$, $y = \frac{\pi}{2}n$. При этом было бы потеряно бесконечное множество решений и, кроме того, возникла бы связь между переменными x и y: $x = 3y$ (чего нет на самом деле). Например, легко проверить, что данная система имеет решение $x = 5\pi$ и $y = \pi$ (в соответствии с полученными формулами), которое при $k = n$ найти невозможно. Поэтому будьте внимательнее.

2. Системы вида $\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ \sin x \sin y = b \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \cos x \sin y = b. \end{cases}$

Такие системы приводятся к простейшим при сложении и вычитании уравнений. При этом получим системы $\begin{cases} \cos(x+y) = a-b, \\ \cos(x-y) = a+b \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin(x-y) = a+b, \\ \sin(x+y) = a-b. \end{cases}$ Отметим очевидное ограничение: $|a-b| \le 1$ и $|a+b| \le 1$. Само же решение подобных систем сложностей не представляет.

Пример 3

Решим систему уравнений $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Преобразуем сначала второе уравнение системы, используя равенство $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Получим: $\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{1}{3}$. Подставим в числитель этой дроби первое уравнение: $\frac{\frac{1}{4}}{\cos x \cos y} = \frac{1}{3}$ и выразим

$\cos x\cos y = \frac{3}{4}$. Теперь имеем систему уравнений $\begin{cases}\cos x\cos y = \frac{3}{4},\\ \sin x\sin y = \frac{1}{4}.\end{cases}$

Сложим и вычтем эти уравнения. Имеем: $\begin{cases}\cos x\cos y + \sin x\sin y = 1,\\ \cos x\cos y - \sin x\sin y = \frac{1}{2}\end{cases}$

или $\begin{cases}\cos(x-y) = 1,\\ \cos(x+y) = \frac{1}{2}.\end{cases}$ Запишем решения этой простейшей системы: $\begin{cases}x-y = 2\pi n,\\ x+y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k.\end{cases}$ Складывая и вычитая эти линейные уравнения, находим: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k+n)$, $y = \pm\frac{\pi}{6} + \pi(k-n)$, где $n, k \in Z$.

3. Системы вида $\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a,\\ x \pm y = b\end{cases}$ **или** $\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a,\\ x \pm y = b.\end{cases}$

Такие системы можно рассматривать как *простейшие* и решать их соответствующим образом. Однако есть и другой способ решения: преобразовать *сумму* тригонометрических функций *в произведение* и использовать оставшееся уравнение.

Пример 4

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},\\ x + y = \frac{\pi}{3}.\end{cases}$

Сначала преобразуем первое уравнение, используя формулу для суммы синусов углов. Получим: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя второе уравнение, имеем: $2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Выпишем решения этого уравнения: $\frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ (где $n \in Z$) и $x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n$. С учетом второго уравнения данной системы получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} x-y=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, \\ x+y=\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ Из этой системы находим $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \\ y=\dfrac{\pi}{6}\pm\dfrac{\pi}{6}-2\pi n. \end{cases}$ Такие решения удобно записать в более рациональном виде. Для верхних знаков имеем: $\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n; -2\pi n\right)$, для нижних знаков – $\left(2\pi n; \dfrac{\pi}{3}-2\pi n\right)$, $n\in Z$.

4. Системы вида $\begin{cases} a_1\sin x+b_1\sin y=c_1, \\ a_2\cos x+b_2\cos y=c_2 \end{cases}$ **или** $\begin{cases} a_1\sin x+b_1\cos y=c_1, \\ a_2\cos x+b_2\sin y=c_2. \end{cases}$

Прежде всего необходимо получить уравнение, содержащее только *одну неизвестную*. Для этого, например, *выразим* из одного уравнения $\sin y$, из другого – $\cos y$. *Возведем в квадрат* эти соотношения и *сложим*. Тогда получается тригонометрическое уравнение, содержащее *неизвестную* x. Решаем такое уравнение. Затем, используя *любое уравнение* данной системы, получаем уравнение для нахождения неизвестной y.

Пример 5

Решим систему уравнений $\begin{cases} \sin y=\sin x, \\ 3\cos x+\cos y=1. \end{cases}$

Запишем систему в виде $\begin{cases} \sin y=\sin x, \\ \cos y=1-3\cos x. \end{cases}$ Возведем в квадрат каждое уравнение системы и получим: $\begin{cases} \sin^2 y=\sin^2 x, \\ \cos^2 y=1-6\cos x+9\cos^2 x. \end{cases}$

Сложим уравнения этой системы: $1=\sin^2 x+1-6\cos x+9\cos^2 x$ или $0=\sin^2 x-6\cos x+9\cos^2 x$. Используя основное тригонометрическое тождество, запишем уравнение в виде $0=1-\cos^2 x-6\cos x+9\cos^2 x$ или $0=8\cos^2 x-6\cos x+1$. Решения этого уравнения $\cos x=\dfrac{1}{2}$ (тогда $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$) и $\cos x=\dfrac{1}{4}$ (откуда $x=\pm\arccos\dfrac{1}{4}+2\pi k$), где $n, k\in Z$. Учитывая связь между неизвестными $\cos y=1-3\cos x$, получим: для $\cos x = \frac{1}{2}$ $\cos y = -\frac{1}{2}$; для $\cos x = \frac{1}{4}$ $\cos y = \frac{1}{4}$. Необходимо помнить, что при решении системы уравнений проводилось возведение в квадрат и эта операция могла привести к появлению посторонних корней. Поэтому надо учесть первое уравнение данной системы, из которого следует, что величины $\sin x$ и $\sin y$ должны быть одного знака.

С учетом этого получим решения данной системы уравнений $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m\right)$ и $\left(\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k; \pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi l\right)$, где $n, m, k, l \in Z$. При этом для неизвестных x и y одновременно выбирают или верхние, или нижние знаки.

В частном случае $|a_1| = |b_1|$ и $|a_2| = |b_2|$ система может быть решена *преобразованием суммы* (или разности) тригонометрических функций *в произведение* и последующим почленным *делением уравнений* друг на друга.

Пример 6

Решим систему уравнений $\begin{cases}\sin x + \sin y = 1,\\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}.\end{cases}$

В каждом уравнении преобразуем сумму и разность функций в произведение и разделим каждое уравнение на 2. Получим: $\begin{cases}\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2},\\ \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$ Так как ни один множитель в левых частях уравнений не равен нулю, то почленно разделим уравнения друг на друга (например, второе на первое). Получим: $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = -\sqrt{3}$, откуда $\frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{3}+\pi n$ (где $n \in Z$). Подставим найденное значение $\frac{x-y}{2}$, например, в первое уравнение: $\sin\frac{x+y}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n\right) = \frac{1}{2}$. Учтем, что $\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n\right) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^n$. Тогда $\sin\frac{x+y}{2} = (-1)^n$, откуда $\frac{x+y}{2} = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in Z$.

Получили систему линейных уравнений $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ \dfrac{x-y}{2}=-\dfrac{\pi}{3}+\pi n. \end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, найдем $x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}+\pi(2k+n)$ и $y=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\pi(2k-n)$, где $k, n\in Z$.

5. Системы, решаемые с помощью замены неизвестных

Если система содержит только *две* тригонометрические функции или приводится к такому виду, то удобно использовать *замену неизвестных.*

Пример 7

Решим систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x-\sin y=3, \\ \operatorname{tg}^2 x+\sin^2 y=17. \end{cases}$

Так как в данную систему входят только две тригонометрические функции, то введем новые переменные $a=\operatorname{tg} x$ и $b=\sin y$. Получим систему алгебраических уравнений $\begin{cases} a-b=3, \\ a^2+b^2=17. \end{cases}$ Из первого уравнения выразим $a=b+3$ и подставим во второе: $(b+3)^2+b^2=17$ или $b^2+3b-4=0$. Корни этого квадратного уравнения $b_1=1$ и $b_2=-4$. Соответствующие значения $a_1=4$ и $a_2=-1$. Вернемся к старым неизвестным. Получим две системы простейших тригонометрических уравнений:

а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x=4, \\ \sin y=1, \end{cases}$ ее решение $x=\operatorname{arctg} 4+\pi n$, $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, где $n, k\in Z$;

б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x=-1, \\ \sin y=-4, \end{cases}$ решений не имеет, так как $\sin y\geq -1$.

Пример 8

Решим систему уравнений $\begin{cases} \sin x+\cos y=1, \\ \cos 2x-\cos 2y=1. \end{cases}$

Преобразуем второе уравнение системы так, чтобы оно содержало только функции $\sin x$ и $\cos y$. Для этого используем формулы понижения степени. Получим: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ (откуда $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$) и $\cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}$ (тогда $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$). Второе уравнение системы имеет вид: $1 - 2\sin^2 x - (2\cos^2 y - 1) = 1$ или $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}$. Получили систему тригонометрических уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$ Введем новые переменные $a = \sin x$ и $b = \cos y$. Имеем симметричную систему уравнений $\begin{cases} a + b = 1, \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$ единственное решение которой $a = b = \frac{1}{2}$. Вернемся к старым неизвестным и получим простейшую систему тригонометрических уравнений $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = \frac{1}{2}, \end{cases}$ решение которой $\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$ где n, $k \in Z$.

6. Системы, для которых важны особенности уравнений

Практически при решении любой системы уравнений используются те или иные ее *особенности*. В частности, один из наиболее общих приемов решения системы – тождественные преобразования, позволяющие получить уравнение, содержащее только *одну неизвестную*. Выбор преобразований, конечно, определяется *спецификой уравнений* системы.

Пример 9

Решим систему $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases}$

Обратим внимание на левые части уравнений, например на $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. Используя формулы приведения, сделаем из нее функцию с аргументом $\frac{\pi}{4}+x$. Получим: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)=$ $=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. Тогда система уравнений имеет вид: $\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\cos^3 y,\\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2\sqrt{2}\sin^3 y.\end{cases}$ Чтобы исключить переменную x, почленно умножим уравнения и получим: $1=8\cos^3 y\sin^3 y$ или $1=\sin^3 2y$, откуда $\sin 2y=1$. Находим $2y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, и $y=\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in Z$.

Удобно отдельно рассмотреть случаи четных и нечетных значений n. Для четных n ($n=2k$, где $k\in Z$) $y=\frac{\pi}{4}+2\pi k$. Тогда из первого уравнения данной системы получим: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$ и $x=\pi m$, где $m\in Z$. Для нечетных n ($n=2k+1$) $y=\frac{\pi}{4}+\pi(2k+1)$. Тогда из первого уравнения имеем: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-1$ и $x=-\frac{\pi}{2}+\pi m$. Итак, данная система имеет решения $\begin{cases}x=\pi m,\\ y=\frac{\pi}{4}+2\pi k\end{cases}$ и $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+\pi m,\\ y=\frac{\pi}{4}+\pi(2k+1),\end{cases}$ где $m, k\in Z$.

Как и в случае уравнений, достаточно часто встречаются системы уравнений, в которых существенную роль играет *ограниченность* функций *синуса и косинуса*.

Пример 10

Решим систему уравнений $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\sin^2 y,\\ \sin^2 y+\cos^2 z=1.\end{cases}$

Прежде всего преобразуем первое уравнение системы: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=2\sin^2 y$, или $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=2\sin^2 y$, или

$\dfrac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=2\sin^2 y$, или $\dfrac{4}{\sin^2 2x}-2=2\sin^2 y$,

или $\dfrac{2}{\sin^2 2x}=1+\sin^2 y$. Учитывая ограниченность функции синуса, видим, что левая часть уравнения не меньше 2, а правая часть не больше 2. Поэтому такое уравнение равносильно условиям $\sin^2 2x=1$ и $\sin^2 y=1$.

Второе уравнение системы запишем в виде $\sin^2 y=1-\cos^2 z$ или $\sin^2 y=\sin^2 z$, и тогда $\sin^2 z=1$. Получили систему простейших тригонометрических уравнений $\begin{cases}\sin^2 2x=1,\\ \sin^2 y=1,\\ \sin^2 z=1.\end{cases}$ Используя формулу понижения степени, запишем систему в виде $\begin{cases}\dfrac{1-\cos 4x}{2}=1,\\ \dfrac{1-\cos 2y}{2}=1,\\ \dfrac{1-\cos 2z}{2}=1\end{cases}$ или

$\begin{cases}\cos 4x=-1,\\ \cos 2y=-1,\\ \cos 2z=-1,\end{cases}$ тогда $\begin{cases}4x=\pi+2\pi k,\\ 2y=\pi+2\pi n,\\ 2z=\pi+2\pi m\end{cases}$ и $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $z=\dfrac{\pi}{2}+\pi m$, где $k, n, m\in Z$.

Разумеется, при решении других систем тригонометрических уравнений также необходимо обращать внимание на *особенности* этих уравнений.

7. Системы, содержащие обратные тригонометрические функции

Такие системы встречаются гораздо *реже*, чем системы уравнений с тригонометрическими функциями. Поэтому остановимся только на нескольких примерах и обратим внимание на особенности решения подобных систем.

Пример 11

Выясним, при каких целых значениях k система уравнений $\begin{cases}(\operatorname{arctg} x)^2+(\arccos y)^2=k\pi^2,\\ \operatorname{arctg} x+\arccos y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ имеет решения, и найдем все эти решения.

Так как в эту систему входят только две обратные тригонометрические функции, то введем новые переменные $a=\operatorname{arctg} x$ и $b=\arccos y$. Тогда система имеет вид: $\begin{cases}a^2+b^2=k\pi^2,\\ a+b=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ Найдем возможные значения k. Учитывая области изменения функций $\operatorname{arctg} x$ и $\arccos y$, получим: $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $b\in[0;\pi]$. Отсюда имеем: $0\le a^2\le\dfrac{\pi^2}{4}$ и $0\le b^2\le\pi^2$. Сложив эти неравенства одного знака, получим: $0\le a^2+b^2\le\dfrac{5\pi^2}{4}$. Учитывая первое уравнение системы, получим: $0\le k\pi^2\le\dfrac{5\pi^2}{4}$ или $0\le k<\dfrac{5}{4}$. В промежуток $\left[0;\dfrac{5}{4}\right)$ входят два целых значения $k=0$ и $k=1$. Рассмотрим два этих случая.

а) При $k=0$ система имеет вид: $\begin{cases}a^2+b^2=0,\\ a+b=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ и решений не имеет.

б) При $k=1$ система принимает вид: $\begin{cases}a^2+b^2=\pi^2,\\ a+b=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ Из второго уравнения выразим $b=\dfrac{\pi}{2}-a$ и подставим в первое. Имеем: $a^2+\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)^2=\pi^2$ или $8a^2-4\pi a-3\pi^2=0$. Корни этого квадратного уравнения $a=\pi\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}$. Очевидно, что корень $a=\pi\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$ не подходит, так как $\pi\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}>\dfrac{\pi}{2}$. Для значения $a=\pi\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$ найдем

$b = \pi\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$ (очевидно, что $0 \le b \le \pi$). Вернемся к старым неизвестным и получим систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{arctg} x = \pi\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}, \\ \arccos x = \pi\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}, \end{cases}$ которая имеет единственное решение $x = \operatorname{tg}\left(\pi\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ и $y = \cos\left(\pi\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$.

Итак, только при $k = 1$ данная система уравнений имеет единственное решение $x = \operatorname{tg}\left(\pi\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ и $y = \cos\left(\pi\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$.

На экзаменах встречаются также системы уравнений, содержащие обратные и прямые тригонометрические функции. Рассмотрим пример такой *смешанной* системы.

Пример 12

Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2x\sin y + 3\cos y = 0, \\ \arcsin\left(\dfrac{x}{2} + \sin y\right) = y - \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Учитывая область изменения функции арксинуса, из второго уравнения получим неравенство $-\dfrac{\pi}{2} \le y - \dfrac{\pi}{3} \le \dfrac{\pi}{2}$. Откуда $-\dfrac{\pi}{6} \le y \le \dfrac{5\pi}{6}$. По определению функции арксинуса из второго уравнения имеем: $\dfrac{x}{2} + \sin y = \sin\left(y - \dfrac{\pi}{3}\right)$, или $\dfrac{x}{2} + \sin y = \sin y\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos y\sin\dfrac{\pi}{3}$, или $\dfrac{x}{2} + \sin y = \dfrac{1}{2}\sin y - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y$, откуда выразим $x = -\sin y - \sqrt{3}\cos y$. Подставим это соотношение в первое уравнение данной системы. Получим: $(-\sin y - \sqrt{3}\cos y)^2 + 2(-\sin y - \sqrt{3}\cos y)\sin y + 3\cos y = 0$ или $-\sin^2 y + 3\cos^2 y + 3\cos y = 0$. Используя основное тригонометрическое тождество, имеем уравнение $4\cos^2 y + 3\cos y - 1 = 0$. Решения этого уравнения $\cos y = -1$ (тогда $y = \pi + 2\pi k$, где $k \in Z$) и $\cos y = \dfrac{1}{4}$ (откуда $y = \pm\arccos\dfrac{1}{4} + 2\pi n$, где $n \in Z$). Из всех найденных решений условию $y \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ удовлетворяет только значение $y = \arccos\frac{1}{4}$. Определим $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и найдем $x = -\sin y - \sqrt{3}\cos y = -\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$. Таким образом, данная система уравнений имеет единственное решение $x = -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$ и $y = \arccos\frac{1}{4}$.

IV. Задание на уроках и на дом

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{2}, \\ x + y = \frac{7\pi}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x + y = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos(x - y) = -\frac{1}{2}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sin(x - y) = \frac{1}{2}, \\ \sin(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \cos x - \sin y = 1, \\ \cos^2 x - \sin^2 y = 1; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \cos x \cos y = 1, \\ \sin x \sin y = 0; \end{cases}$

13) $\begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \sin y = 0, \\ 2\cos^2 x + \cos 2y = 2; \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{-\sin x} \cdot \operatorname{tg} y = 0, \\ \sin^2 x + \operatorname{tg}\frac{y}{2} = 1; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ 3\cos x + \sin y = 2; \end{cases}$
16) $\begin{cases} -a\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} y = 2a + 3, \\ 9\operatorname{tg} x - a\operatorname{ctg} y = 3a + 2; \end{cases}$

17) $\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 n, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}, \text{ где } n \in Z; \end{cases}$

18) $\begin{cases} \arccos x + (\arcsin y)^2 = \dfrac{\pi^2}{4} n, \\ (\arcsin y)^2 \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^4}{16}, \text{ где } n \in Z. \end{cases}$

Ответы: 1) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;$

2) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = -\frac{\pi}{3} + \pi(3 - n);$

3) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ y = -2\pi n;\ \ x = -2\pi n,\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;$

4) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ y = -\pi n;\ \ x = -\pi n,\ y = \frac{\pi}{6} + \pi n;$

5) $x = \pi(m + n) \pm \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3},\ y = \pi(m - n) \pm \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3};$

6) $x = \frac{\pi}{2}(m + n) + (-1)^m \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{12},\ y = \frac{\pi}{2}(m - n) + (-1)^m \frac{\pi}{6} - (-1)^n \frac{\pi}{12};$

7) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$

8) $x = \frac{\pi}{3} + \pi m,\ y = \frac{\pi}{3} + \pi n;$

9) $x = \pi m + (-1)^m \frac{\pi}{4},\ y = 2\pi n \pm \frac{3\pi}{4};\ \ x = \pi m + (-1)^{m+1} \frac{\pi}{4},\ y = 2\pi n \pm \frac{\pi}{4};$

10) $x = 2\pi m,\ y = \pi n;$

11) $x = \pi\left(m + \frac{n}{2}\right) + \frac{\pi}{4},\ y = \pi\left(\frac{n}{2} - m\right) - \frac{\pi}{4};$

12) $x = \pi(m + n),\ y = \pi(m - n);$

13) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ y = \pi m;$

14) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ y = \pi m;$

15) $x = \pm\arccos\dfrac{1-2a}{2-3a} + 2\pi n,\ y = (-1)^m \arcsin\dfrac{1}{2-3a} + \pi m$ при $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right] \cup [1; \infty)$; $x, y \in \varnothing$ при $a \in \left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$;

16) $x = \operatorname{arctg}\dfrac{2a+1}{4-a} + \pi n,\ y = \operatorname{arcctg}\dfrac{3(a+2)}{4-a} + \pi m$ при $|a| \neq 4$; $x = t$, $y = \operatorname{arcctg}(5 + 2\operatorname{tg} t) + \pi n$, t – любое действительное число, кроме $t = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, при $a = -4$; $x, y \in \varnothing$ при $a = 4$;

17) при $n = 1$ $x = \operatorname{tg}\dfrac{\pi(1-\sqrt{7})}{4},\ y = \cos\dfrac{\pi(1+\sqrt{7})}{4}$;

18) при $n = 2$ $x = \cos\dfrac{\pi^2}{4},\ y = \pm 1$.

V. Подведение итогов уроков

Уроки 56–57. Контрольная работа по теме «Преобразование тригонометрических функций»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin 7x \cos 3x - \cos 7x \sin 3x$.

2. Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 18^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 18^\circ}$;

б) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ$.

3. Найдите sin $2x$, если $\cos x = \frac{3}{5}$ и $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Упростите выражение $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

5. Решите уравнение $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$.

Вариант 2

1. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x$.

2. Вычислите:

а) $\frac{\operatorname{tg} 61^\circ - \operatorname{tg} 16^\circ}{1 + \operatorname{tg} 61^\circ \operatorname{tg} 16^\circ}$;

б) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ$.

3. Найдите cos $2x$, если $\sin x = \frac{4}{5}$ и $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Упростите выражение $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

5. Решите уравнение $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$.

Вариант 3

1. Найдите наименьший положительный период функции $y = 3(\cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x) - 5(\sin 7x \cos 3x - \cos 7x \sin 3x) - 11$.

2. Вычислите:

а) $\frac{2\cos 10^\circ \cos 70^\circ - \cos 80^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 10^\circ - \sin 50^\circ}$;

б) $\frac{\sin^2 11^\circ + \sin^2 79^\circ}{\cos^2 53^\circ + \cos^2 37^\circ}$.

3. Найдите sin 2α, если $3\sin\alpha + 3\cos\alpha = 1$.

4. Упростите выражение $\frac{\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha} - \operatorname{tg} 6\alpha + 7$.

5. Решите уравнение $\sin 6x = \cos 2x$.

Вариант 4

1. Найдите наименьший положительный период функции $y = 4(\cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x) - 7(\sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x) + 9$.

2. Вычислите:

а) $\frac{2\cos 13^\circ \cos 43^\circ - \cos 56^\circ}{2\sin 58^\circ \cos 13^\circ - \sin 71^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin^2 8^\circ+\sin^2 82^\circ}{\cos^2 51^\circ+\cos^2 39^\circ}$.

3. Найдите $\sin 2\alpha$, если $2\sin\alpha-2\cos\alpha=1$.

4. Упростите выражение $\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 7\alpha+\cos 10\alpha}-\operatorname{tg} 7\alpha+5$.

5. Решите уравнение $\cos 8x=\sin 4x$.

Вариант 5

1. Найдите наименьший положительный период функции $y=6\sin 7x\cos 2x-\dfrac{10\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+3$.

2. Сравните числа $\dfrac{\sin 32^\circ+\sin 22^\circ}{\sin 32^\circ-\sin 22^\circ}$ и $\dfrac{\operatorname{tg} 5^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ}$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=4\cos^2 3x-2\cos^2 6x+1$.

4. Найдите $\operatorname{ctg} 2x$, если $\dfrac{4\sin x+\cos x}{5\sin x-3\cos x}=2$.

5. Упростите выражение $\sin^2\beta-\cos^2(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

6. Решите уравнение $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{8}\right)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Вариант 6

1. Найдите наименьший положительный период функции $y=8\cos 9x\cos 4x-7\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+5$.

2. Сравните числа $\dfrac{\sin 12^\circ+\sin 10^\circ}{\sin 12^\circ-\sin 10^\circ}$ и $\dfrac{\operatorname{tg} 1^\circ}{\operatorname{tg} 11^\circ}$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=6\cos^2 2x+3\cos^2 4x-1$.

4. Найдите $\operatorname{ctg} 2x$, если $\dfrac{4\sin x-3\cos x}{3\sin x+2\cos x}=3$.

5. Упростите выражение $\cos^2\beta+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

6. Решите уравнение $\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(3x+\dfrac{6\pi}{5}\right)$.

Урок 58. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{2}$.

2. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) 0.

3. $\frac{24}{25}$.

4. $\cos\alpha + \sin\alpha$.

5. $\frac{\pi}{12} + \pi n,\ -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n$.

Вариант 2

1. $\frac{2\pi}{5}$.

2. а) 1; б) 0.

3. $-\frac{7}{25}$.

4. $\cos\alpha - \sin\alpha$.

5. $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n,\ \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{3}n$.

Вариант 3

1. 2π.

2. а) 1; б) 1.

3. $-\frac{8}{9}$.

4. 7.

5. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n,\ \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n$.

Вариант 4

1. 2π.

2. а) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; б) 1.

3. $\frac{3}{4}$.

4. 5.

5. $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ \frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{6}n$.

Вариант 5

1. Преобразуем произведение функций в сумму и используем формулу для $\sin 2x$. Тогда получим: $y=3\sin 9x+3\sin 5x-5\sin 2x+3$. Выпишем периоды функций, входящих в $y(x)$: $T_1=\frac{2\pi}{9}=\frac{10\pi}{45}$, $T_2=\frac{2\pi}{5}=\frac{18\pi}{45}$ и $T_3=\frac{2\pi}{2}=\frac{45\pi}{45}$. Найдем НОК (10, 18, 45) = 90. Тогда период данной функции $T=\frac{90\pi}{45}=2\pi$.

Ответ: 2π.

2. Упростим первое число: $\frac{\sin 32^\circ+\sin 22^\circ}{\sin 32^\circ-\sin 22^\circ}=\frac{2\sin 27^\circ\cos 5^\circ}{2\sin 5^\circ\cos 27^\circ}=$ $=\operatorname{tg} 27^\circ\operatorname{ctg} 5^\circ=\frac{\operatorname{tg} 27^\circ}{\operatorname{tg} 5^\circ}$. В первой четверти функция $y=\operatorname{tg} x$ возрастает и принимает положительные значения. Тогда $\operatorname{tg}27^\circ>\operatorname{tg}5^\circ>0$ и отношение $\frac{\operatorname{tg} 27^\circ}{\operatorname{tg} 5^\circ}>1$. Соответственно, второе число $\frac{\operatorname{tg} 5^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ}<1$. Поэтому первое число больше.

Ответ: первое число больше.

3. Используем формулу понижения степени и запишем функцию в виде $y=4\frac{1+\cos 6x}{2}-2\cos^2 6x+1=-2\cos^2 6x+2\cos 6x+3$. Обозначим z = $\cos 6x$ (где $z\in[-1;1]$) и получим квадратичную функцию $y=-2z^2+2z+3$. Наибольшее значение функции достигается при $z=\frac{1}{2}$, и $y_{\text{наиб}}=-2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3=3{,}5$. Наименьшее значение функции достигается при $z=-1$, и $y_{\text{наим}}=-2\cdot 1-2+3=-1$.

Ответ: $y_{\text{наим}}=-1$, $y_{\text{наиб}}=3{,}5$.

4. Преобразуем данное равенство $\dfrac{4\sin x+\cos x}{5\sin x-3\cos x}=2$ и получим: $4\sin x+\cos x=10\sin x-6\cos x$ или $7\cos x=6\sin x$, откуда $\operatorname{tg}x=\dfrac{7}{6}$.

Найдем $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\dfrac{\frac{7}{3}}{1-\frac{49}{36}}=-\dfrac{7\cdot36}{3\cdot13}=-\dfrac{84}{13}$ и $\operatorname{ctg}2x=-\dfrac{13}{84}$.

Ответ: $-\dfrac{13}{84}$.

5. Используя соответствующие формулы, выполним преобразования: $\sin^2\beta-\cos^2(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$

$=\sin^2\beta-\cos(\alpha-\beta)(\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta)=$

$=\sin^2\beta-\cos(\alpha-\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta)=$

$=\sin^2\beta+\cos(\alpha-\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$

$=\sin^2\beta+\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\beta+\dfrac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)=$

$=\sin^2\beta+\dfrac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2\beta)=\dfrac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta)=$

$=\dfrac{1}{2}(1+\cos2\alpha)=\cos^2\alpha.$

Ответ: $\cos^2\alpha$.

6. Запишем уравнение в виде $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(x-\dfrac{\pi}{9}\right)\right)=0$ или $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\dfrac{11\pi}{18}-x\right)=0$. Преобразуем разность функций в произведение $2\sin\left(2x+\dfrac{103\pi}{72}\right)\cos\left(x+\dfrac{95\pi}{72}\right)=0$. Получим совокупность уравнений $\sin\left(2x+\dfrac{103\pi}{72}\right)=0$ (тогда $2x+\dfrac{103\pi}{72}=\pi n$ и $x=-\dfrac{103\pi}{144}+\dfrac{\pi}{2}n$) и $\cos\left(x+\dfrac{95\pi}{72}\right)=0$ (тогда $x+\dfrac{95\pi}{72}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=-\dfrac{59\pi}{72}+\pi n$).

Ответ: $-\dfrac{103\pi}{144}+\dfrac{\pi}{2}n,\ -\dfrac{59\pi}{72}+\pi n.$

Вариант 6

1. Преобразуем произведение функций в сумму и используем формулу для $\cos 2x$. Тогда получим: $y = 4\cos 13x + 4\cos 5x - 7\cos 2x + 5$. Выпишем периоды функций, входящих в $y(x)$: $T_1 = \frac{2\pi}{13} = \frac{10\pi}{65}$, $T_2 = \frac{2\pi}{5} = \frac{26\pi}{65}$ и $T_3 = \frac{2\pi}{2} = \frac{65\pi}{65}$. Найдем НОК (10, 26, 65) = 130. Тогда период данной функции $T = \frac{130\pi}{65} = 2\pi$.

Ответ: 2π.

2. Упростим первое число: $\frac{\sin 12^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 12^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{2\sin 11^\circ \cos 1^\circ}{2\sin 1^\circ \cos 11^\circ} = \operatorname{tg} 11^\circ \operatorname{ctg} 1^\circ = \frac{\operatorname{tg} 11^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ}$. В первой четверти функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает и принимает положительные значения. Тогда $\operatorname{tg} 11^\circ > \operatorname{tg} 1^\circ > 0$ и отношение $\frac{\operatorname{tg} 11^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ} > 1$. Соответственно, второе число $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ}{\operatorname{tg} 11^\circ} < 1$. Поэтому первое число больше.

Ответ: первое число больше.

3. Используем формулу понижения степени и запишем функцию в виде $y = 6\frac{1+\cos 4x}{2} + 3\cos^2 4x + 5 = 3\cos^2 4x + 3\cos 4x + 8$. Обозначим $z = \cos 4x$ (где $z \in [-1; 1]$) и получим квадратичную функцию $y = 3z^2 + 3z + 8$. Наименьшее значение функции достигается при $z = -\frac{1}{2}$, и $y_{\text{наим}} = 3\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{2} + 8 = 7\frac{3}{4}$. Наибольшее значение функции достигается при $z = 1$, и $y_{\text{наиб}} = 3 + 3 + 8 = 14$.

Ответ: $y_{\text{наим}} = 7\frac{3}{4}$, $y_{\text{наиб}} = 14$.

4. Преобразуем данное равенство $\frac{4\sin x - 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x} = 3$ и получим: $4\sin x - 3\cos x = 9\sin x + 6\cos x$ или $-9\cos x = 5\sin x$, откуда $\operatorname{tg} x = -\frac{9}{5}$. Найдем $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{18}{5}}{1-\frac{81}{25}} = \frac{18\cdot 25}{5\cdot 56} = \frac{45}{28}$ и $\operatorname{ctg} 2x = \frac{28}{45}$.

Ответ: $\frac{28}{45}$.

5. Используя соответствующие формулы, выполним преобразования: $\cos^2\beta+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=$

$=\cos^2\beta+\cos(\alpha-\beta)(\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta)=$

$=\cos^2\beta+\cos(\alpha-\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta)=$

$=\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$

$=\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos^2\beta-\sin^2\beta)=$

$=\frac{1}{2}(\cos^2\beta+\sin^2\beta-\cos2\alpha)=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)=\sin^2\alpha.$

Ответ: $\sin^2\alpha$.

6. Запишем уравнение в виде $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(3x+\frac{6\pi}{5}\right)\right)=0$ или $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(3x+\frac{7\pi}{5}\right)=0$. Преобразуем разность функций в произведение $2\sin\left(2x+\frac{11\pi}{30}\right)\cos\left(x+\frac{31\pi}{30}\right)=0$. Получим совокупность уравнений $\sin\left(2x+\frac{11\pi}{30}\right)=0$ (тогда $2x+\frac{11\pi}{30}=\pi n$ и $x=-\frac{11\pi}{60}+\frac{\pi}{2}n$) и $\cos\left(x+\frac{31\pi}{30}\right)=0$ (тогда $x+\frac{31\pi}{30}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ и $x=-\frac{8\pi}{15}+\pi n$).

Ответ: $-\frac{11\pi}{60}+\frac{\pi}{2}n,\ -\frac{8\pi}{15}+\pi n.$

Уроки 59–60. Зачетная работа по теме «Преобразование тригонометрических выражений»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

A

1. Дано: $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $4\pi < \alpha < 5\pi$. Найдите sin α, tg α, ctg α.

2. Сравните числа $\cos 14^\circ \cos 74^\circ$ и $\frac{1}{2}$.

3. Вычислите $\frac{\operatorname{tg} 49^\circ + \operatorname{tg} 11^\circ}{1 - \operatorname{tg} 49^\circ \operatorname{tg} 11^\circ}$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{2 + 2\cos 2x}$.

5. Решите уравнение $\sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x$.

6. Решите неравенство $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2} \geq 0$.

7. Упростите выражение $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin 2\alpha}$.

B

8. Дано: $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{15}$, $-\frac{7\pi}{2} < \alpha < -\frac{5\pi}{2}$. Найдите cos α – sin α.

9. Сравните числа $\frac{\sin 112^\circ}{\sin 7^\circ}$ и $\cos 7^\circ \cos 14^\circ \cos 28^\circ \cos 56^\circ$.

10. Найдите область значений функции $y = 5\sin x - 12\cos x + 3$.

11. Упростите выражение $\frac{\sin(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha - 2\beta)}{\sin(\alpha - 2\beta) + \sin(\alpha + 2\beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 2\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

C

12. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

13. Найдите множество значений функции $y = \frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{4}\right)$.

14. Решите уравнение $\sin x + \sin(a + x) + \sin(a - x) = 2$.

Вариант 2

A

1. Дано: $\cos\alpha = \frac{21}{29}$, $9\pi < \alpha < 10\pi$. Найдите sin α, tg α, ctg α.

2. Сравните числа $\cos 10^\circ \cos 40^\circ$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Вычислите $\frac{\operatorname{tg} 31^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ}{1 - \operatorname{tg} 31^\circ \operatorname{tg} 29^\circ}$.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{2 - 2\cos 4x}$.

5. Решите уравнение $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$.

6. Решите неравенство $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$.

7. Упростите выражение $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}$.

B

8. Дано: $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{11}$, $\frac{13\pi}{2} < \alpha < \frac{15\pi}{2}$. Найдите $\cos\alpha - \sin\alpha$.

9. Сравните числа $\frac{\sin 256^\circ}{\sin 16^\circ}$ и $\cos 16^\circ \cos 32^\circ \cos 64^\circ \cos 128^\circ$.

10. Найдите область значений функции $y = 12\sin x + 5\cos x - 4$.

11. Упростите выражение $\frac{\sin(2\alpha + \beta) + \sin(2\alpha - \beta)}{\sin(2\alpha - \beta) - \sin(2\alpha + \beta)} - \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

C

12. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}}$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

13. Найдите множество значений функции $y = \frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}}\right)$.

14. Решите уравнение $\sin x + \cos(a + x) + \cos(a - x) = 2$.

IV. Ответы и решения

Вариант 1

1. $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$.

2. Второе число больше.

3. $\sqrt{3}$.

4. График $y = 2|\cos x|$.

5. $\frac{\pi}{12} + \pi n,\ \frac{7\pi}{48} + \frac{\pi}{4}n.$

6. $\left[-\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n;\ \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n\right].$

7. $\operatorname{tg}^2\alpha.$

8. $-\sqrt{\frac{17}{15}}.$

9. Первое число больше.

10. $E(y) = [-10; 16]$.

11. -1.

12. В подкоренных выражениях умножим числители и знаменатели дробей на сопряженную величину знаменателя. Получим:
$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}} - \sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}} =$
$= \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} = \frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} - \frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$

В силу ограниченности функции $\sin\alpha$ при всех α величины $1 + \sin\alpha \geq 0$ и $1 - \sin\alpha \geq 0$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$ и $|\cos\alpha| =$ $= -\cos\alpha$. Поэтому выражение $\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{2\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -2\operatorname{tg}\alpha$. Для значения $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ найдем значение данного выражения: $-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

13. Используем метод введения вспомогательного угла и преобразуем функцию: $y = \frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) - \frac{1}{4}\right) =$ $= \frac{12}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\right)$. Учтем, что функция арксинуса возрастающая, и запишем неравенства $-1 \leq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1$, $-\frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{3}{4}$, $-1 \leq \frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\right) \leq \frac{\pi}{6}$, тогда

$-6 \le y \le 2$. Таким образом, множество значений данной функции $E(y) = [-6; 2]$.

Ответ: $[-6; 2]$.

14. Преобразуем сумму двух последних функций в произведение: $\sin x + 2\sin a \cos x = 2$. Используем метод введения вспомогательного угла. Разделим все члены уравнения на $\sqrt{1+4\sin^2 a}$. Получаем: $\frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}\sin x + \frac{2\sin a}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}\cos x = \frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$. Будем считать, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$ и $\sin\varphi = \frac{2\sin a}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = 2\sin a$ и $\varphi = \operatorname{arctg}(2\sin a)$. Уравнение имеет вид: $\sin(x+\varphi) = \frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}}$, решения которого $x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}} + \pi n$ и $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}} + \pi n - \operatorname{arctg}(2\sin a)$, где $n \in Z$. При этом должно выполняться неравенство $\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}} \le 1$. Решим его и получим: $2 \le \sqrt{1+4\sin^2 a}$, или $4 \le 1 + 2(1-\cos 2a)$, или $\cos 2a \le -\frac{1}{2}$, откуда $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2a \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ и $a \in \left[\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, где $k \in Z$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 a}} + \pi n - \operatorname{arctg}(2\sin a)$ при $a \in \left[\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, где $n, k \in Z$.

Вариант 2

1. $\sin\alpha = -\frac{20}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{20}{21}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{21}{20}$.
2. Второе число больше.
3. $\sqrt{3}$.
4. График $y = 2|\sin 2x|$.
5. $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n$.

6. $\left[-\frac{\pi}{24}+\pi n;\ \frac{7\pi}{24}+\pi n\right]$.

7. $-\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

8. $-\sqrt{\frac{17}{11}}$.

9. Второе число больше.

10. $E(y)=[-9;\ 17]$.

11. 1.

12. В подкоренных выражениях умножим числители и знаменатели дробей на сопряженную величину знаменателя. Получим:
$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}=$$
$$=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$$

В силу ограниченности функции $\sin\alpha$ при всех α величины $1+\sin\alpha\ge 0$ и $1-\sin\alpha\ge 0$. Так как $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то $\cos\alpha>0$ и $|\cos\alpha|=$ $=\cos\alpha$. Поэтому выражение $\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Для значения $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{1}{2}$ найдем значение данного выражения: $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$.

Ответ: -1.

13. Используем метод введения вспомогательного угла и преобразуем функцию: $y=\frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\right)=$ $=\frac{9}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Учтем, что функция арккосинуса убывающая, и запишем неравенства $-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, $-\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\le\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, $\frac{\pi}{2}\ge\arccos\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ge 0$, тогда $3\ge y\ge 0$. Таким образом, множество значений данной функции $E(y)=[0;\ 3]$.

Ответ: $[0;\ 3]$.

14. Преобразуем сумму двух последних функций в произведение: $\sin x + 2\cos a \cos x = 2$. Используем метод введения вспомогательного угла. Разделим все члены уравнения на $\sqrt{1+4\cos^2 a}$. Получим: $\frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\sin x + \frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}\cos x = \frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$. Будем считать, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$ и $\sin\varphi = \frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = 2\cos a$ и $\varphi = \operatorname{arctg}(2\cos a)$. Уравнение имеет вид: $\sin(x+\varphi) = \frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}$, решения которого $x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + \pi n$ и $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + \pi n - \operatorname{arctg}(2\cos a)$. При этом должно выполняться неравенство $\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} \le 1$. Решим его и получим: $2 \le \sqrt{1+4\cos^2 a}$, или $4 \le 1 + 2(1+\cos 2a)$, или $\cos 2a \ge \frac{1}{2}$, откуда $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 2a \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $a \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, где $k \in Z$.

Ответ: $(-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}} + \pi n - \operatorname{arctg}(2\cos a)$ при $a \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, где $n, k \in Z$.

Глава 5
Производная

Начнем изучать новый раздел математики – «Математический анализ», разумеется, только самые его начала. В этой главе рассмотрим фундаментальные понятия, позволяющие более детально проводить исследования функций, – *предел функции* и *производную*.

Уроки 61–62. Предел последовательности

Цель: привести основные понятия, связанные с последовательностями.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

Определение 1. Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$ называют *функцией натурального аргумента* или *числовой последовательностью* и обозначают $y = f(n)$, или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, или (y_n). Также можно сказать, что числовой последовательностью называют множество чисел, для каждого из которых известен его порядковый номер.

Пример 1

а) Для последовательности положительных нечетных чисел 1, 3, 5, 7, … – известно, что первое число равно 1, второе число равно 3, третье число равно 5 и т. д.

б) Для последовательности правильных дробей с числителем 1: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ – известно, что первое число равно $\frac{1}{2}$, второе число равно $\frac{1}{3}$, третье число равно $\frac{1}{4}$ и т. д.

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности* обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$. Соответственно, член последовательности с номером n (или n-й *член последовательности*) обозначают y_n, а саму последовательность – (y_n).

Пример 2

Рассмотрим последовательность натуральных трехзначных чисел: 100; 101; 102; …; 999. В ней: $y_1 = 100$, $y_2 = 101$, $y_3 = 102$, …, $y_{900} = 999$. Член этой последовательности с номером n (n-й член последовательности) можно вычислить по формуле $y_n = 99 + n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots, 900$.

1. Способы задания последовательностей

Последовательность необходимо *задать*, т. е. указать способ, с помощью которого можно найти каждый ее член. Рассмотрим *основные способы задания* последовательностей.

1. Аналитический способ (формула n-го члена)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти по номеру n ее член y_n.

Пример 3

а) Пусть последовательность задана формулой $y_n = 3n - 2$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $y_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, $y_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$, $y_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ и т. д. Имеем последовательность 1, 4, 7, … .

б) Пусть последовательность задана формулой $y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$. Подставляя вместо n натуральные числа, находим члены последовательности: $y_1 = \dfrac{1+(-1)^1}{2} = 0$, $y_2 = \dfrac{1+(-1)^2}{2} = 1$, $y_3 = \dfrac{1+(-1)^3}{2} = 0$, $y_4 = \dfrac{1+(-1)^4}{2} = 1$ и т. д. Имеем последовательность 0, 1, 0, 1, … .

2. Аналитический способ (рекуррентная формула)

Последовательность задается формулой, которая позволяет найти следующие члены последовательности, если известны один или несколько предыдущих членов.

Пример 4

а) Пусть последовательность задана формулой $y_{n+1} = 2y_n + 3$, где $y_1 = 5$ и $n \geq 1$.

Запишем рекуррентную формулу для $n = 1$: $y_{1+1} = 2y_1 + 3$ или $y_2 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$.

Запишем формулу для $n = 2$: $y_{2+1} = 2y_2 + 3$ или $y_3 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Запишем формулу для $n = 3$: $y_{3+1} = 2y_3 + 3$ или $y_4 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность 5, 13, 29, 61, … .

б) Пусть последовательность задана формулой $y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n$, где $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ и $n \geq 1$.

Запишем рекуррентную формулу для $n = 1$: $y_{1+2} = 2y_{1+1} + 3y_1$, или $y_3 = 2y_2 + 3y_1$, или $y_3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$.

Запишем формулу для $n = 2$: $y_{2+2} = 2y_{2+1} + 3y_2$ или $y_4 = 2y_3 + 3y_2 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$.

Запишем формулу для $n = 3$: $y_{3+2} = 2y_{3+1} + 3y_3$, или $y_5 = 2y_4 + 3y_3$, или $y_5 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 61$ и т. д.

Имеем последовательность 1, 2, 7, 20, 61, ...

3. Описательный способ

Описывается способ получения членов последовательности.

Пример 5

а) Рассмотрим последовательность натуральных четных чисел. Из описания последовательности легко выписать ее члены: 2, 4, 6, 8, ...

б) Рассмотрим последовательность приближений по недостатку с точностью до n цифр иррационального числа π. Из описания последовательности выписываем ее члены: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3, 1415; ... .

2. Основные свойства последовательностей

Теперь рассмотрим *два основных свойства* последовательностей.

1. Ограниченность последовательности

Определение 2. Последовательность (y_n) называют *ограниченной сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа M, т. е. $y_n \le M$. Число M называют *верхней границей последовательности*.

Пример 6

Последовательность $y_n = 5 - n$ ограничена сверху. При этом число $M = 4$. Покажем, что при всех натуральных n выполнено неравенство $y_n \le M$. Получаем неравенство $5 - n \le 4$, откуда $n \ge 1$ (т. е. неравенство справедливо при всех $n \in N$).

Определение 3. Последовательность (y_n) называют *ограниченной снизу*, если все ее члены не меньше числа m, т. е. $y_n \ge m$. Число m называют *нижней границей последовательности*.

Пример 7

Последовательность $y_n = 3 + 2n$ ограничена снизу. При этом число $m = 5$. Покажем, что при всех натуральных n выполнено неравенство $y_n \ge m$. Получаем неравенство $3 + 2n \ge 5$, откуда $n \ge 1$ (т. е. неравенство справедливо при всех $n \in N$).

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ограниченной последовательностью. Иначе, последовательность (y_n) называют *ограниченной*, если существуют два таких числа m и M, что для любого натурального номера n выполнено неравенство $m \le y_n \le M$.

Пример 8

Докажем ограниченность последовательности $y_n = \dfrac{n-1}{n+2}$.

Найдем первый член последовательности $y_1 = \dfrac{1-1}{1+2} = 0$ и член последовательности с очень большим номером n, например $y_{100} = \dfrac{100-1}{100+2} = \dfrac{99}{102} \approx 1$. Возникает гипотеза, что последовательность ограничена, $m = 0$ и $M = 1$. Поэтому надо доказать, что при всех натуральных значениях n выполнено неравенство $0 \le \dfrac{n-1}{n+2} \le 1$. Очевидно, что левая часть неравенства $0 \le \dfrac{n-1}{n+2}$ выполняется. Рассмотрим правую часть неравенства $\dfrac{n-1}{n+2} \le 1$. Так как выражение $n + 2$ положительно, то получаем неравенство $n - 1 \le n + 2$ или $-1 \le 2$, которое является верным.

2. Монотонность последовательности

Определение 4. Последовательность (y_n) называют *возрастающей*, если каждый ее член (начиная со второго) больше предыдущего, т. е. $y_{n+1} > y_n$ для $n \ge 1$.

Определение 5. Последовательность (y_n) называют *убывающей*, если каждый ее член (начиная со второго) меньше предыдущего, т. е. $y_{n+1} < y_n$ для $n \ge 1$.

Пример 9

Определим монотонность последовательности $y_n = \dfrac{n-1}{n+2}$.

Запишем $(n + 1)$-й член последовательности: $y_{n+1} = \dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+2} = \dfrac{n}{n+3}$. Найдем разность двух соседних членов: $y_{n+1} - y_n = \dfrac{n}{n+3} - \dfrac{n-1}{n+2} = \dfrac{n(n+2)-(n+3)(n-1)}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{3}{(n+3)(n+2)}$. Так как n – натуральное число, то при всех n дробь $\dfrac{3}{(n+3)(n+2)}$ положительна. Поэтому $y_{n+1} - y_n > 0$ или $y_{n+1} > y_n$ при всех n. Тогда по определению данная последовательность (y_n) возрастающая.

Заметим, что последовательность $y_n = a^n$ при $a > 1$ возрастает, при $0 < a < 1$ убывает.

3. Предел последовательности

Введем еще одно важнейшее понятие – предел последовательности.

Определение 6. Число b называют *пределом последовательности* (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера N. В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (читают: предел последовательности (y_n) при стремлении n к бесконечности равен b, при этом часто фразу «при стремлении n к бесконечности» опускают). Используют и такую запись: $y_n \to b$ (читают: y_n стремится к b, или y_n сходится к b).

Разъясним понятие «окрестность точки b». Под ним понимают интервал $(b - r; b + r)$, где r – радиус окрестности ($r > 0$).

Пример 10

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$

Прежде всего отметим, что понятие предела последовательности очень сложное и с трудом воспринимается даже студентами. Поэтому подробно будем разбираться с этим примером (буквально по пунктам).

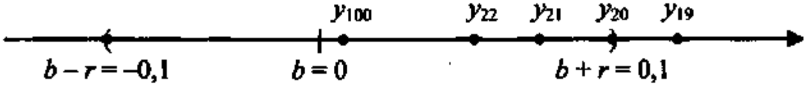
1. В данном случае число $b = 0$. Выберем произвольный радиус r окрестности точки b (обычно r выбирают небольшим и $r > 0$). Поэтому будем рассматривать интервал $(0 - r; 0 + r)$ или $(-r; r)$.

2. Нужно найти номер N, начиная с которого все члены последовательности $y_n = \frac{2}{n}$ будут находиться в интервале $(-r; r)$. Другими словами, надо относительно n решить неравенство $-r < \frac{2}{n} < r$.

3. Очевидно, что левая часть неравенства $-r < \frac{2}{n}$ выполняется при всех натуральных n. Решим правую часть неравенства $\frac{2}{n} < r$. Получим $2 < nr$, откуда $n > \frac{2}{r}$. Итак, при $n > \frac{2}{r}$ все члены последовательности y_n отличаются от своего предела *в* менее чем на r.

4. Сделаем оценки. При $r = 0{,}1$ получаем $n > 20$ (т. е. начиная с номера $N = 21$ все члены последовательности отличаются от предела не более чем на $0{,}1$). При $r = 0{,}01$ имеем $n > 200$ (т. е. начиная с номера

$N = 201$ все члены последовательности отличаются от предела не более чем на 0,01) и т. д. На рисунке приведена графическая иллюстрация для этого случая.



Видно, что в r-окрестности предела собирается (сгущается) бесконечное множество членов последовательности, вне этой окрестности находится только конечное число членов.

Если последовательность (y_n) имеет предел, то говорят, что она *сходится*, если не имеет предела – то *расходится*.

4. Теоремы о пределах и вычисление пределов последовательностей

Приведем формулировки теорем о пределах последовательностей.

Теорема 4.1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

Теорема 4.2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Теорема 4.3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Теорема 4.4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то:

1) предел суммы равен сумме пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c$;

2) предел произведения равен произведению пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc$;

3) предел частного равен частному пределов: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{b}{c}$, $c \neq 0$;

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = kb$.

Теорема 4 используется при вычислении пределов последовательностей.

Пример 11

Найдем пределы последовательностей: а) $y_n = \dfrac{2}{n^3}$; б) $y_n = \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{3}{n} - 2$;
в) $y_n = \dfrac{2n^2 + 3}{5n^2 - 1}$; г) $y_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$; д) $y_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

а) Используем теоремы 4.2 и 4.4 и получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^3} = 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$

б) Применим теоремы 4.1 и 4.4. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n}-2\right)=$

$=5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}2=5\cdot0+3\cdot0-2=-2.$

в) Заметим, что сразу использовать теорему 4.3 нельзя, так как числитель $2n^2+3$ и знаменатель $5n^2-1$ дроби бесконечно большие величины и получаем что-то непонятное: $\frac{\infty}{\infty}$. Поэтому разделим числитель и знаменатель дроби на n^2 и используем теоремы 4.1, 4.3 и 4.4. Получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{5n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{5-\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$

$=\frac{2+3\cdot0}{5-0}=\frac{2}{5}.$

г) Опять же сразу применять теоремы 4.3 и 4.1 нельзя. Тогда получим: $y_n=\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{1}{n}$. Каждое слагаемое в этой сумме стремится к нулю (т. е. $\frac{1}{n^2}\to0,\ \frac{2}{n^2}\to0,\ ...,\ \frac{1}{n}\to0$), но в эту сумму входят n слагаемых, т. е. бесконечно большая величина. Получаем опять нечто непонятное: $0\cdot\infty$.

Учтем, что числитель дроби является суммой арифметической прогрессии и используем теоремы 4.1, 4.3, 4.4. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=$

$=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2}.$

д) При $n\to\infty$ множитель $\sqrt{n}\to\infty$, множитель $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\to0$. Возникает опять что-то непонятное: $\infty\cdot0$. Поэтому умножим и разделим данное выражение на $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ и применим теоремы 4.1, 4.3, 4.4. Получаем: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$

Таким образом, вычисление пределов последовательностей несложно, но необходимо проявлять внимание и аккуратность. При больших значениях n *члены* последовательности практически *равны* ее *пределу*.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение последовательности.
2. Основные способы задания последовательности.
3. Ограниченность последовательности.
4. Монотонность последовательности.
5. Понятие r-окрестности точки b.
6. Определение предела последовательности.
7. Теоремы о пределах последовательности (фронтальный опрос).

IV. Задание на уроках

§ 24, № 1 (а, б); 3 (в, г); 7 (а, б); 10; 14 (а, г); 15 (а, б); 16 (б, г); 19 (а, б); 20 (г); 22 (б).

V. Задание на дом

§24, № 1 (в, г); 3 (а, б); 7 (в, г); 11; 14 (б, в); 15 (в, г); 16 (а, в); 19 (в, г); 20 (а); 22 (г).

VI. Творческие задания

1. Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), если:

а) $a_{n+1} = 3a_n - 1$, $a_1 = 1$;

б) $a_{n+1} = 4a_n + 3$, $a_1 = 2$;

в) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

г) $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$;

д) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$;

е) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Ответы: а) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 14$; б) $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = 47$, $a_4 = 191$; в) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$; г) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = -3$, $a_4 = -5$; д) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$; е) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$.

2. Докажите ограниченность последовательности (a_n):

а) $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$;

б) $a_n = \dfrac{1-3n}{n+2}$;

в) $a_n = \dfrac{n+5}{n}$;

г) $a_n = \dfrac{3-2n}{n+1}$.

3. Определите монотонность последовательности (a_n):

а) $a_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$;

б) $a_n = (-1)^n \cdot n$;

в) $a_n = \frac{5-2n}{n+2}$;

г) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

д) $a_n = \frac{3n-4}{n+3}$;

е) $a_n = \frac{3-n}{n+1}$;

ж) $a_n = n^2 + 4n + 10$;

з) $a_n = n^2 - 8n + 20$.

Ответы: а, д, ж) возрастающая; в, е) убывающая; б, г, з) немонотонная.

VII. Подведение итогов уроков

Урок 63. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Цель: получить формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение возрастающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \frac{3n-2}{n+1}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3 - 2a_n$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

4. Вычислите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n^2 + \sqrt{n}}{n^2 + 2n}$.

Вариант 2

1. Определение убывающей последовательности.

2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \dfrac{3-2n}{n+2}$. Найдите a_1, a_5, a_{10}.

3. Последовательность (a_n) задана формулой $a_{n+1} = 3a_n - 2$, где $a_1 = 2$ и $n \geq 1$. Найдите первые четыре члена последовательности.

4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-\sqrt{n}}{n^2+3n}$.

III. Изучение нового материала

Одной из изученных последовательностей является геометрическая прогрессия $b_n = b_1q^{n-1}$, которая рассматривалась в 9 классе. Были изучены основные свойства такой прогрессии.

Если $|q| < 1$, то прогрессия называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Для нее, разумеется, как и для любой геометрической прогрессии, справедливы свойства и формулы, приведенные ранее. Кроме того, можно вычислить сумму бесконечного числа членов такой прогрессии по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Пример 1

Найдем сумму чисел 6; 3; $\dfrac{3}{2}$; ... .

Данные числа образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, для которой $b_1 = 6$ и $q = \dfrac{1}{2}$. Тогда ее сумма равна $S = \dfrac{6}{1-\dfrac{1}{2}} = 12$.

Пример 2

Запишем в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь 0,(27).

Получим: $0,(27) = 0,272727\ldots = \dfrac{27}{100} + \dfrac{27}{10\,000} + \dfrac{27}{1\,000\,000} + \ldots$ – эти дроби образуют бесконечную геометрическую прогрессию, у которой $b_1 = \dfrac{27}{100}$ и $q = \dfrac{1}{100}$. Ее сумма равна $\dfrac{\dfrac{27}{100}}{1-\dfrac{1}{100}} = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$.

Итак, $0,(27)=\frac{3}{11}$.

Пример 3

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найдем эту прогрессию.

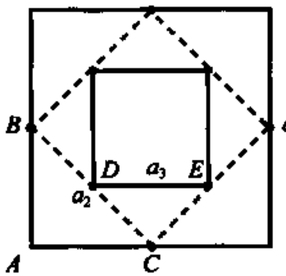
Пусть дана прогрессия b_1; b_1q; b_1q^2; ...; $|q| < 1$. Тогда ее сумма $4=\frac{b_1}{1-q}$. Кубы членов данной прогрессии b_1^3; $b_1^3q^3$; $b_1^3q^6$; ... также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3. Так как при $|q| < 1$ величина $|q^3| = |q|^3 < 1$, то эта прогрессия также бесконечно убывающая и ее сумма $192=\frac{b_1^3}{1-q^3}$. Получим систему нелинейных уравнений $\begin{cases} 4=\frac{b_1}{1-q}, \\ 192=\frac{b_1^3}{1-q^3}. \end{cases}$ Для решения этой системы возведем первое уравнение в куб: $64=\frac{b_1^3}{(1-q)^3}$ – и разделим второе уравнение системы на полученное уравнение: $3=\frac{(1-q)^3}{1-q^3}=\frac{(1-q)^2}{1+q+q^2}$ или $2q^2+5q+2=0$. Корни этого уравнения $q=-\frac{1}{2}$ и $q = -2$ (не подходит, так как прогрессия бесконечно убывающая и $|q| < 1$). Теперь из первого уравнения находим $b_1=4(1-q)=4\cdot\frac{3}{2}=6$.

Пример 4

Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединим отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с данным, и т. д. Найдем суммы сторон, периметров и площадей всех этих квадратов.

Обозначим стороны этих квадратов (начиная с данного): a, a_2, a_3, ... Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC: $AB=AC=\frac{a}{2}$, $BC = a_2$. Запишем для него теорему Пифагора:

$BC^2 = AC^2 + AC^2$ или $a_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$, откуда $a_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Аналогично из прямоугольного треугольника DEC находим: $a_3 = \frac{a_2\sqrt{2}}{2}$ и т. д.



Таким образом, стороны квадратов образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию a, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a}{2}$, ..., у которой первый член a и знаменатель $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдем ее сумму: $\frac{a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2a}{2-\sqrt{2}} =$

$$= \frac{2a(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = a(2+\sqrt{2}) \approx 3{,}4a.$$

Так как периметр квадрата $4a$, то периметры приведенных квадратов также образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $4a$ и знаменателем $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому ее сумма $4a(2+\sqrt{2})$.

Площадь квадрата a^2 и площади квадратов a^2, $\frac{a^2}{2}$, $\frac{a^2}{4}$, ... образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом a^2 и знаменателем $\frac{1}{2}$, поэтому сумма площадей $\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$.

Итак, сумма сторон $a(2+\sqrt{2})$, периметров – $4a(2+\sqrt{2})$, площадей – $2a^2$.

IV. Контрольные вопросы

1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
2. Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

V. Задание на уроке

§ 25, № 1 (а, б); 4 (в, г); 6 (а); 7 (г); 8 (а, б); 9 (б); 10; 13 (а, б); 14 (а); 15 (в, г).

VI. Задание на дом

§ 25, № 1 (в, г); 4 (а, б); 6 (б); 7 (в); 8 (в, г); 9 (в); 11; 13 (в, г); 14 (б); 15 (а, б).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 64–65. Предел функции

Цели: дать понятие предела функции; рассмотреть простейшие его свойства.

Ход уроков

I. Сообщение темы и целей уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите сумму геометрической прогрессии 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...
2. Решите уравнение $2x+4x^2+8x^3+\ldots=3$ (где $|x|<1$).
3. Представьте в виде обыкновенной дроби 0,(16).

Вариант 2

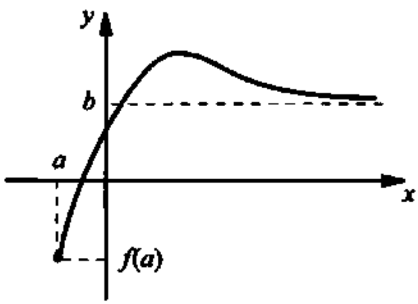
1. Найдите сумму геометрической прогрессии 8, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, ...
2. Решите уравнение $3x+6x^2+12x^3+\ldots=2$ (где $|x|<1$).
3. Представьте в виде обыкновенной дроби 0,(24).

III. Изучение нового материала

Понятие и строгое определение предела функции достаточно *сложные*, и многие студенты их не воспринимают и не умеют ими пользоваться. Поэтому на этом занятии мы попытаемся дать некие представления о пределе функции и его свойствах, не вводя строгого определения предела. Все-таки при этом попытаемся связать предел функции с пределом последовательности (что обсуждалось ранее).

1. Предел функции на бесконечности

Будем рассматривать поведение функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Пусть область определения такой функции $D(f) = [a; +\infty)$. Возьмем последовательность аргументов $x_n = a + n$ (где $n \in N$) и соответствующую ей последовательность значений $y_n = f(x_n)$ функции в этих точках. Пусть предел такой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$ Разумно считать, что *число* b является и *пределом функции* $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности. Для описания этой математической модели используют запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b.$ При этом прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Другими словами, при $x \to +\infty$ значения функции $y = f(x)$ практически равны числу b.

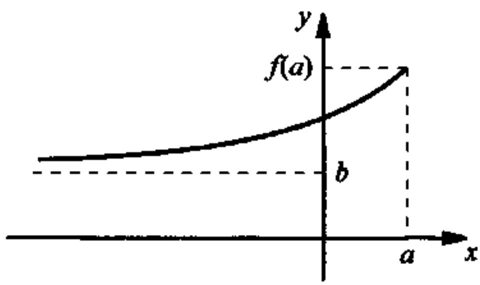


Пример 1

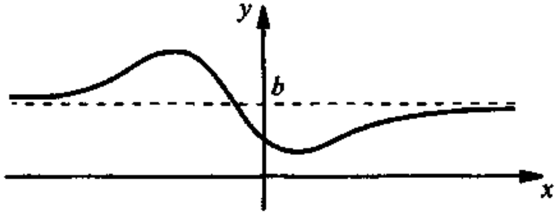
Найдем предел функции $y = \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим последовательность аргументов $x_n = n$ (где $n \in N$). Очевидно, что при $n \to \infty$ аргументы $x_n \to +\infty$. Соответствующая последовательность значений функции имеет вид: $y_n = \dfrac{2x_n^2+1}{x_n^2+2} = \dfrac{2n^2+1}{n^2+2}$. Предел такой последовательности легко вычисляется: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n^2}} = 2.$ Тогда и предел данной функции $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 2.$

Аналогично можно дать определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$. Пусть область определения этой функции $D(f) = (-\infty; a]$. Рассмотрим последовательность аргументов $x_n = a - n$ (где $n \in N$), которая при $n \to \infty$ стремится к $-\infty$ (т. е. $x_n \to -\infty$). Возьмем соответствующую ей последовательность значений $y_n = f(x_n)$ функции в этих точках. Пусть предел такой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Тогда будем считать, что *число* b является и *пределом функции* $y = f(x)$ при стремлении x к минус бесконечности, т. е. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. При этом прямая $y = b$ будет *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.



Если выполнены соотношения $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, то их объединяют одной записью $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ или еще более короткой записью $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ (читают: предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b).



Так как *предел функции связан с пределом последовательности*, то при вычислении подобных пределов используются аналогичные *теоремы*.

1) Для любого натурального показателя m справедливо соотношение $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^m}\right) = 0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = c$, то:

а) предел суммы равен сумме пределов, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = b+c$;

б) предел произведения равен произведению пределов, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = b\cdot c$;

в) предел частного равен частному пределов (при $c \neq 0$), т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$;

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}(kf(x)) = kb$.

В силу этих теорем вычисление пределов функции похоже на вычисление пределов последовательностей.

Пример 2

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+5x}-\sqrt{4x^2+x})$.

Преобразуем данную функцию $f(x)=\sqrt{4x^2+5x}-\sqrt{4x^2+x}$. Для этого выражение умножим и разделим на сопряженную величину:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{4x^2+5x}-\sqrt{4x^2+x})(\sqrt{4x^2+5x}+\sqrt{4x^2+x})}{\sqrt{4x^2+5x}+\sqrt{4x^2+x}}=\frac{(4x^2+5x)-(4x^2+x)}{\sqrt{4x^2+5x}+\sqrt{4x^2+x}}=$$

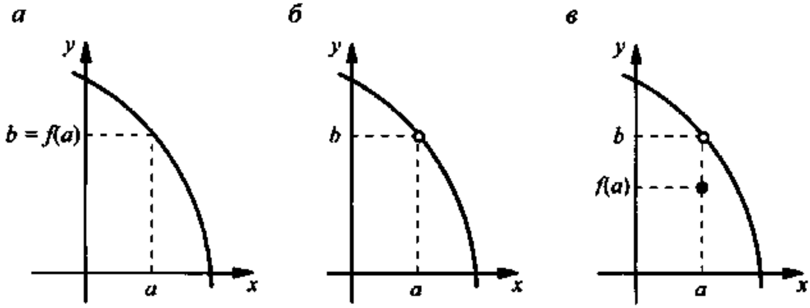
$=\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+5x}+\sqrt{4x^2+x}}$. Теперь легко вычислить предел функции:

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+5x}+\sqrt{4x^2+x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{|2x|+|2x|}$. Отсюда $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

2. Предел функции в точке

Такое понятие характеризует поведение функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x=a$. При этом в самой точке $x=a$ функция может и не существовать. Попробуем сформулировать понятие предела функции $y=f(x)$ в точке $x=a$. Рассмотрим последовательности аргументов $x_n=a\pm\dfrac{1}{n}$ $(n\in N)$, которые сходятся к точке a, т. е. $x_n\to a$ при $n\to\infty$. Также рассмотрим соответствующие последовательности $y_n=f(x_n)$ значений функции. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=b$. Тогда разумно считать, что число b является *пределом функции* $y=f(x)$ в точке $x = a$. При этом используют запись $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (читают: предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b).

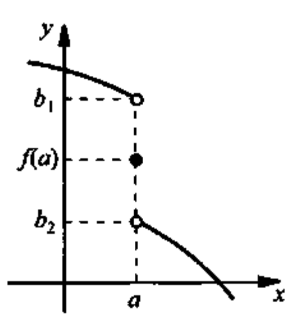
Обсудим три часто встречающиеся ситуации (см. рисунок).



За исключением точки $x = a$, функции одинаковы, пределы этих функций $\lim_{x \to a} f(x) = b$ также равны. Отличие функций состоит в следующем: в случае *а* функция существует во всех точках и предел функции равен ее значению в точке a (т. е. $b = f(a)$); в случае *б* функция не определена в точке a (т. е. $f(a)$ не существует); в случае *в* функция определена во всех точках, но $b \neq f(a)$.

Таким образом, *графический смысл предела* заключается в следующем: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то соответствующие значения функции все меньше и меньше будут отличаться от предела b.

Заметим, что положение еще сложнее. Обсудим функцию, график которой приведен на рисунке.



Функция $y = f(x)$ определена во всех точках. Что касается предела функции, то ситуация усложняется. Видно, что при стремлении x к a слева (т. е. при $x < a$) $\lim_{x \to a} = b_1$, при стремлении x к a справа (т. е. при

$x > a$) $\lim\limits_{x \to a} = b_2$. Поэтому начинает возникать понятие *одностороннего предела* функции. Сейчас мы не имеем возможности углубляться в эти понятия. Однако помните, что функции и их графики могут быть очень непривычными и сложными. Чтобы их характеризовать, и приходится вводить все более и более сложные понятия.

Обсудим теперь очередное понятие – *непрерывность функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$. Ранее мы говорили, что функция непрерывна, если ее график представляет собой сплошную линию (без разрывов, выколотых точек и т. д.). Таковой является функция *а* на рис. *а–в*.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной* в точке $x = a$, если предел функции при стремлении x к a равен ее значению в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример 3

Докажем, что функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке $x = a$.

Сначала найдем предел функции $\lim\limits_{x \to a} x^2$. Рассмотрим последовательность $x_n = a + \frac{1}{n}$ (где $n \in N$), сходящуюся к a. Тогда $\lim\limits_{x \to a} x^2 = \lim\limits_{x \to \infty} x_n^2 = \lim\limits_{x \to \infty}\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = \lim\limits_{x \to \infty}\left(a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = a^2$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2a}{n} = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. С другой стороны, $f(a) = a^2$. Видно, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = a^2$. Поэтому по определению данная функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке $x = a$.

Функция $y = f(x)$ *непрерывна на промежутке* X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

В курсе математического анализа доказано *утверждение*: если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.

Понятие непрерывности функции помогает вычислять пределы функции, так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример 4

Найдем $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2x}{x - 2}$.

Данная функция $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x-2}$ определена в точке $x=1$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\dfrac{3+2}{1-2}=-5$.

Пример 5

Вычислим $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x+1}{4\cos 2x-1}$.

Функция $f(x)=\dfrac{2\sin x+1}{4\cos 2x-1}$ определена в точке $x=\dfrac{\pi}{6}$. Получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}+1}{4\cos\frac{\pi}{3}-1}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}+1}{4\cdot\frac{1}{2}-1}=\frac{2}{1}=2.$$

Если функция $y=f(x)$ не определена в точке $x=a$, то предел функции также можно вычислить.

Пример 6

Найдем $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x-12}$.

При $x=4$ числитель и знаменатель функции $f(x)=\dfrac{x^2-16}{3x-12}$ равны нулю, а делить на нуль нельзя. Поэтому сократим дробь: $f(x)=\dfrac{(x-4)(x+4)}{3(x-4)}=\dfrac{x+4}{3}$. Теперь вычислим предел этой функции:

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{4+4}{3}=\dfrac{8}{3}$. Заметим, что выражения $\dfrac{x^2-16}{3x-12}$ и $\dfrac{x+4}{3}$ совпадают при $x\neq 4$. Причем для вычисления предела функции при $x\to 4$ саму точку $x=4$ исключают из рассмотрения.

Пример 7

Вычислим $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

1-й способ. Поступим аналогично предыдущему примеру и сократим дробь. Для этого числитель и знаменатель умножим на величину $\sqrt{x+1}+2$. Получим: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=\sqrt{4}+2=4.$$

2-й способ. Введем новую переменную $z=\sqrt{x+1}$. Тогда при $x\to 3$ величина $z=\sqrt{x+1}\to 2$ и $x = z^2 - 1$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=$

$=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{z^2-1-3}{z-2}=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{(z-2)(z+2)}{z-2}=\lim\limits_{z\to 2}(z+2)=2+2=4.$

При вычислении некоторых пределов полезно помнить, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел).

Пример 8

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$.

Используем формулу понижения степени и теоремы о пределах:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{32\sin^2 4x}{16x^2}=32\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=$
$=32\cdot 1\cdot 1=32.$

Пример 9

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin x}$.

Представим функцию $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin x}$ в виде $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8\sin 8x\cdot x}{8x\sin x}=$

$$=8\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=8\cdot\frac{1}{1}=8.$$

При вычислении предела функции в точке, как и при вычислении предела последовательности и предела функции на бесконечности, используют *теорему о пределах*. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$, то:

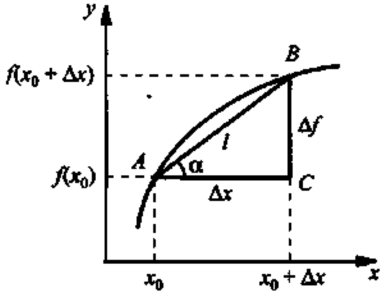
1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c$;
2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=b\cdot c$;
3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}$ $(c\neq 0)$;
4) $\lim\limits_{x\to a}(kf(x))=k\cdot b$.

3. Приращение аргумента. Приращение функции

Для характеристики поведения функции $y = f(x)$ вблизи точки x_0 необходимо знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятие приращений аргумента и функции.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$. Величину Δx называют *приращением аргумента* (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$), а разность $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называют *приращением функции*.

Обсудим *геометрический смысл* введенных понятий приращений аргумента и функции.



Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и две точки $A(x_0; f(x_0))$ и $B((x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$, принадлежащие графику. Проведем через эти точки секущую l. В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AC = \Delta x$ и $BC = \Delta f$. *Угловой коэффициент* k секущей l равен $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. (Напомним, что угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла α, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.)

Разумеется, введенные понятия используются в физике и технике. Запишем, например, *среднюю скорость* движения тела за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$. При движении тела по прямой средняя скорость $V_{\text{ср}}(\Delta t) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$, где $x(t)$ – координата тела.

По аналогии со средней скоростью движения тела выражение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ называют *средней скоростью изменения функции* $f(x)$ на промежутке $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Пример 10

Найдем приращения аргумента Δx и функции Δf в точке $x_0 = 3$, если $f(x) = 3x^2$ и:

а) $x = 2{,}9$;

б) $x = 3{,}1$.

Используя рассмотренные понятия, получим:

а) $\Delta x = x - x_0 = 2{,}9 - 3 = -0{,}1$; $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 3\cdot 2{,}9^2 - 3\cdot 3^2 =$
$= 3\cdot(2{,}9^2 - 3^2) = 3\cdot(2{,}9-3)\cdot(2{,}9+3) = 3\cdot(-0{,}1)\cdot 5{,}9 = -1{,}77$;

б) $\Delta x = x - x_0 = 3{,}1 - 3 = 0{,}1$; $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 3\cdot 3{,}1^2 - 3\cdot 3^2 =$
$= 3\cdot(3{,}1^2 - 3^2) = 3\cdot(3{,}1-3)\cdot(3{,}1+3) = 3\cdot 0{,}1\cdot 6{,}1 = 1{,}83$.

Пример 11

Найдем приращение Δf функции $f(x)$ в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx и:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

б) $f(x) = \sin x$.

Используя понятие приращения функции, получим:

а) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{(x_0+\Delta x)^2} - \dfrac{1}{x_0^2} = \dfrac{x_0^2 - (x_0+\Delta x)^2}{(x_0+\Delta x)^2 x_0^2} =$
$= \dfrac{x_0^2 - x_0^2 - 2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{(x_0+\Delta x)^2 x_0^2} = -\dfrac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{(x_0+\Delta x)^2 x_0^2}$;

б) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$
$= 2\sin\dfrac{(x_0+\Delta x) - x_0}{2}\cdot\cos\dfrac{(x_0+\Delta x)+x_0}{2} = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$.

Пример 12

Дан квадрат со стороной a. Найдем погрешность ΔS, допущенную при вычислении площади $S = a^2$ этого квадрата, если погрешность при измерении стороны квадрата равна Δx.

По определению приращения аргумента $x = a + \Delta x$, тогда приращение функции $\Delta S = S(x) - S(a) = (a+\Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2$.

В заключение еще раз обсудим *непрерывность функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$. Ранее данное определение значило, что функция непрерывна, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Так как $x \to a$, то приращение аргумента $\Delta x = x - a \to 0$. При этом $f(x) \to f(a)$, т. е. приращение функции $\Delta f = f(x) - f(a) \to 0$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(\Delta x) = 0$. Заметим, что из примеров 10–12 следует, что для фиксированной точки a приращение функции Δf зависит *только* от приращения аргумента, т. е. Δf является функцией Δx.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если при $\Delta x = x - a \to 0$ величина $\Delta f = f(x) - f(a) \to 0$.

Пример 13

Покажем, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке $x = a$.

Рассмотрим приращение аргумента $\Delta x = x - a$, тогда $x = a + \Delta x$. Найдем $f(x) = (a + \Delta x)^2 = a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2$, $f(a) = a^2$ и приращение функции $\Delta f = 2a\Delta x + (\Delta x)^2$. Очевидно, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$. Тогда $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке $x = a$.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие о пределе функции на бесконечности.
2. Предел функции в точке $x = a$.
3. Дайте определение приращения аргумента и приращения функции.
4. Чему равен угловой коэффициент секущей к графику функции?
5. Запишите определение средней скорости движения тела.
6. Что называют средней скоростью изменения функции?
7. Непрерывность функции в точке $x = a$.
8. Непрерывность функции на промежутке X.

V. Задание на уроках

§ 26, № 1; 3; 5 (а, в); 7 (б, г); 8 (б); 10 (а, б); 11; 12 (в, г); 14 (а); 15 (в, г); 17 (а, б); 18 (в); 19 (а); 21 (в, г); 23 (а); 24 (б).

VI. Задание на дом

§ 26, № 2; 4; 5 (б, г); 7 (а, в); 8 (г); 10 (в, г); 12 (а, б); 13; 14 (б); 15 (а, б); 17 (в, г); 18 (б); 19 (б); 21 (а, б); 23 (б); 24 (г).

VII. Творческое задание

Вычислите:

а) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$;

в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2\sqrt{x+3} - 4}{x - 1}$;

г) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{3x+7} - 4}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 6x}$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin 5x}{\sin 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{2x}$;

з) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin 9x - \sin x}$.

Ответы: а) $\frac{1}{6}$; б) 4; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{8}{3}$; д) $\frac{1}{3}$; е) 5; ж) 2; з) $\frac{5}{8}$.

VIII. Подведение итогов уроков

Урок 66. Определение производной

Цель: рассмотреть понятия производной, мгновенной скорости движения тела, касательной к графику функции.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Дайте определение средней скорости движения тела.

2. Выразите приращение функции $f(x)$ в точке x_0 через x_0 и Δx, если:

а) $f(x)=2x^2+3x$;

б) $f(x)=3\cos 2x$.

3. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-5}{x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^2-9}$.

Вариант 2

1. Дайте определение средней скорости изменения функции.

2. Выразите приращение функции $f(x)$ в точке x_0 через x_0 и Δx, если:

а) $f(x)=3x^2+2x$;

б) $f(x)=2\sin 3x$.

3. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-2x^2-1}{x^3+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{4-x^2}$.

III. Изучение нового материала

Производная является одним из важнейших понятий математического анализа и позволяет проводить исследование функций и строить их графики.

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1. Мгновенная скорость движения

Рассмотрим физическую задачу на определение *мгновенной* скорости движения. Пусть точка движется по прямой и ее координата x в момент времени t равна $S(t)$. Предполагаем, что движение происходит непрерывно и плавно (как в реальной жизни). Возникает задача: по известной зависимости $S(t)$ определить скорость $V(t)$, с которой движется точка в момент времени t (такая скорость называется *мгновенной*).

Если зависимость $S(t)$ *линейная*, то задача имеет простое решение: в любой момент времени скорость есть отношение пройденного пути ко времени. Если движение *неравномерное*, то *решение* задачи *усложняется*. Сначала найдем среднюю скорость за промежуток времени Δt от t_0 до $t_0 + \Delta t$. Эта скорость $V_{ср}(\Delta t)$ равна $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Очевидно, если Δt очень мало, то за такой промежуток времени скорость практически не меняется. Поэтому средняя скорость $V_{ср}(\Delta t)$ почти не отличается от мгновенной скорости $V_{мгн}(t_0)$. Тогда возникает следующий способ вычисления мгновенной скорости – надо найти $V_{ср}(\Delta t)$ и определить, к какому значению она стремится, если Δt практически равно нулю, т. е. $V_{мгн}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} V_{ср}(\Delta t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Пример 1

Найдем мгновенную скорость тела при равноускоренном (равнозамедленном) движении.

При таком движении координата тела меняется по закону $S(t) = S_0 + V_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, где S_0 и V_0 – начальные координата и скорость; a – ускорение тела.

1) Найдем приращение координаты $\Delta S(\Delta t) = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0) =$

$$= \left(S_0 + V_0(t_0 + \Delta t) + \frac{a(t_0 + \Delta t)^2}{2}\right) - \left(S_0 + V_0 t_0 + \frac{at_0^2}{2}\right) = V_0 \Delta t + at_0 \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}.$$

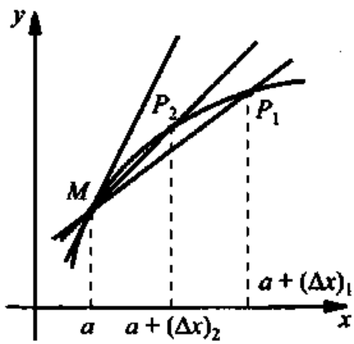
2) Определим среднюю скорость: $V_{ср}(\Delta t) = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = V_0 + at_0 + \dfrac{a\Delta t}{2}$.

3) Вычислим мгновенную скорость. Для этого будем уменьшать Δt, приближая эту величину к нулю (для краткости говорят, что Δt стремится к нулю, и записывают: $\Delta t \to 0$). Тогда выражение

$\frac{a\Delta t}{2} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, величины V_0 и at_0 постоянны. Получим, что при $\Delta t \to 0$ величина $V_{ср}(\Delta t) = V_{мгн}(t_0) = V_0 + at_0$. Итак, мгновенная скорость $V_{мгн}(t_0) = V_0 + at_0$.

Задача 2. Касательная к графику функции

Практически все рассматриваемые в школе функции имеют графики, представляющие собой *гладкие кривые*. Рассмотрим поведение таких кривых. Для этого еще раз вернемся к рисунку предыдущего урока.



Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и точки $M(a; f(a))$, $P_1(a+(\Delta x)_1)$; $f(a+(\Delta x)_1)$, $P_2(a+(\Delta x)_2)$, $f(a+(\Delta x)_2)$, принадлежащие графику. Через точки M и P_1, M и P_2 проведем секущие MP_1 и MP_2.

При небольших значениях Δx секущие MP_1 и MP_2 мало отличаются от соответствующих дуг. Видно, что с уменьшением Δx различие между секущей и дугой уменьшается. Очевидно, что при стремлении положения точек P_1 и P_2 к положению точки M секущие MP_1 и MP_2 становятся *касательными*. Таким образом, при x, близких к a, график функции $f(x)$ *практически совпадает* с графиком касательной, проведенной в точке a. Поэтому необходимо знать *поведение* такой *касательной*, т. е. *уравнение касательной*. Координаты одной точки касательной известны – это точка $(a; f(a))$. Остается определить угловой коэффициент k касательной, т. е. $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пример 2

Получим уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^3$ в точке $a = 1$.

Угловой коэффициент $k(\Delta x)$ секущей, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(a + \Delta x; f(a + \Delta x))$, равен $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, где Δf – приращение функции $f(x)$ в точке a, соответствующее приращению Δx аргумента. Для функции $f(x) = x^3$ получим: $k(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(a+\Delta x)^3 - a^3}{\Delta x} = \frac{3a^3\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3a^2 + 3a(\Delta x) + (\Delta x)^2$. Теперь найдем угловой коэффициент k касательной. Коэффициент $k(\Delta x)$ будет стремиться к величине k, если Δx приближается к нулю, т. е. $k = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3a^2$. При $a = 1$ находим: $k = 3$ и $f(a) = 1^3 = 1$.

Уравнение касательной имеет вид: $y = kx + b$ или $y = 3x + b$. Так как эта касательная проходит через точку (1; 1), то получаем условие $1 = 3 \cdot 1 + b$, откуда $b = -2$. Итак, уравнение касательной имеет вид: $y = 3x - 2$. Следовательно, при x, близких к $a = 1$, функция $f(x) = a^3$ ведет себя примерно как касательная $y = 3x - 2$.

Таким образом, две совершенно различные задачи привели к одной и той же математической модели – пределу отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при условии, что приращение аргумента Δx стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Многие задачи науки и техники приводят к такой же модели. Поэтому эту математическую модель необходимо изучить, т. е.:

а) присвоить ей термин и дать ее формальное определение;

б) ввести для нее обозначение;

в) исследовать свойства новой модели;

г) определить ее область применения.

2. Определение производной

Два рассмотренных примера о нахождении уравнения касательной к данной кривой и вычислении мгновенной скорости тела имели *различные формулировки*, но решались фактически с использованием *одинакового алгоритма*. Применительно к произвольной функции $f(x)$ и любой точке x_0 ее области определения такой алгоритм (схема) имеет вид.

1) С помощью формулы, задающей функцию $f(x)$, найдем ее *приращение* в точке x_0 и получаем: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2) Определяем *выражение для разностного отношения* $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, которое затем преобразуем (упрощаем, сокращаем на Δx и т. д.).

3) Вычисляем, *к какому числу стремится отношение* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если Δx стремится к нулю, т. е. находим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Найденное подобным образом число называют *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0. По аналогии с физикой производная функции $f(x)$ в точке x_0 характеризует *скорость изменения* данной *функции* в точке x_0.

Определение. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *называется число, к которому стремится разностное отношение* $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ *при* Δx, *стремящемся к нулю*. Производную функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$ (читают: эф штрих от x_0), т. е. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пример 3

Найдем производную функции $f(x) = 3x^2 + 2x$ в точке x_0.

В соответствии с описанной схемой вычислим производную.

1) Найдем приращение функции: $\Delta f = 3(x_0 + \Delta x)^2 + 2(x_0 + \Delta x) - (3x_0^2 + 2x_0) = 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2\Delta x$.

2) Определим разностное отношение: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 6x_0 + 3\Delta x + 2$.

3) При $\Delta x \to 0$ величина $3\Delta x \to 0$, слагаемые $6x_0$ и 2 постоянны (не зависят от Δx). Тогда отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 6x_0 + 2$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому $f'(x) = 6x_0 + 2$ – производная функции $f(x) = 3x^2 + 2x$ в точке x_0.

Пример 4

Найдем производную линейной функции $f(x) = ax + b$ в точке x_0 (где a и b постоянны).

Используя описанный алгоритм, вычислим производную.

1) Найдем приращение функции: $\Delta f = (a(x_0 + \Delta x) + b) - (ax_0 + b) = a\Delta x$.

2) Определим разностное отношение: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = a$.

3) Так как a – постоянная величина, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – постоянное число при любом значении Δx. Поэтому $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to a$ при $\Delta x \to 0$.

Итак, $f'(x_0) = a$ – производная функции $f(x) = ax + b$ в любой точке x_0.

Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют *дифференцируемой* в этой точке. Пусть D – множество точек, в которых $f(x)$ дифференцируема. Сопоставляя каждому $x \in D$ число $f'(x)$, получают новую функцию $f'(x)$ с областью определения D. Эту функцию называют *производной* функции $y = f(x)$ и обозначают $f'(x)$ или $y'(x)$. Нахождение производной данной функции $f(x)$ называют *дифференцированием* функции $f(x)$.

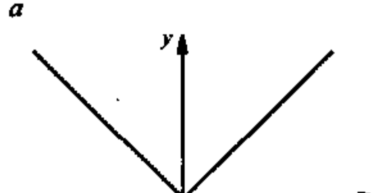
Обсудим, как связаны между собой непрерывность и дифференцируемость функции в точке. Справедливо *утверждение*: если функция $y = f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0, *то* она и *непрерывна* в этой точке. Действительно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выполняется приближенное равенство $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$. Если в этом равенстве устремить Δx к нулю, то и Δf будет стремиться к нулю. Тогда по определению функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Обратное утверждение: если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она дифференцируема в ней – является неверным.

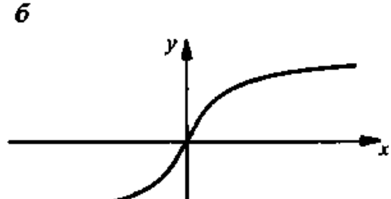
Пример 5

Рассмотрим функции $f'(x) = |x|$ (рис. *а*) и $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (рис. *б*). Область определения этих функций $D(f) = (-\infty; +\infty)$, т. е. функции непрерывны в каждой точке, в том числе в точке $x_0 = 0$.

а



б



Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то к графику этой функции в точке $A(x_0; f(x_0))$ можно провести касательную. Причем угловой коэффициент k касательной равен $f'(x_0)$, т. е. $k = f'(x_0)$.

В точке $x_0 = 0$ к графику функции $f(x) = |x|$ касательную провести нельзя, т. е. производная $f'(x_0)$ не существует. К графику функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 0$ построить можно, но она будет вертикальна, т. е. совпадает с осью $0y$. Эта касательная образует с осью $0x$ прямой угол. Тангенс такого угла не существует. Поэтому не существуют также угловой коэффициент k и производная $f'(x_0)$.

IV. Контрольные вопросы

1. Понятие о касательной к графику функции.
2. Как найти угловой коэффициент касательной?
3. Вычисление мгновенной скорости движения.
4. Определение производной функции.
5. Какая функция называется дифференцируемой?
6. Что называется дифференцированием функции?

V. Задание на уроке

§ 27, № 1 (а, б); 3 (в); 4 (а, б); 5 (а); 9; 10 (а); 11 (в, г); 12 (а, б); 13 (в, г); 14 (а, б).

VI. Задание на дом

§ 27, № 1 (в, г); 3 (а); 4 (в, г); 5 (б); 10 (б); 11 (а, б); 12 (в, г); 13 (а, б); 14 (в, г).

VII. Подведение итогов урока

Уроки 67–69. Вычисление производных

Цель: изучить таблицу производных, правила дифференцирования.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x) = 4x - 5$ в точке $x_0 = 3$.

2. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 3 - x^2$ в точке $a = -1$.

3. Определите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S(t) = 2t^2 + 5$ в момент $t_0 = 4$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x) = 3x + 4$ в точке $x_0 = 2$.

2. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2 + 2$ в точке $a = 1$.

3. Определите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S(t) = -4t^2 + 3$ в момент $t_0 = 3$.

III. Изучение нового материала

На предыдущем занятии мы дали определение производной, объяснили ее физический и геометрический смысл. Теперь необходимо сделать следующий шаг. Для этого на сегодняшнем занятии рассмотрим формулы дифференцирования (таблицу производных) и правила дифференцирования.

1. Формулы дифференцирования (таблица производных)

Производные всех функций были получены с помощью определения производной.

Пример 1

Докажем, что $f'(x) = -6x + 2$, если $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Для произвольной точки x_0 найдем приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -3(x_0 + \Delta x)^2 + 2(x_0 + \Delta x) - (-3x_0^2 + 2x_0) =$ $= -6x_0\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 2\Delta x$.

2) Определим разностное отношение: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -6x_0 - 3\Delta x + 2$. Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(-6x_0 - 3\Delta x + 2) = -6x_0 + 2 = f'(x_0)$, так как функция $-6x_0 - 3\Delta x + 2 \to -6x_0 + 2$. Поэтому $f'(x) = -6x + 2$.

Пример 2

Найдем производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

1) Найдем приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$ $= \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}$.

2) Преобразуем это выражение, умножив и разделив его на сопряженную величину: $\Delta f = \dfrac{(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0})(\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})}{\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)} + \sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} =$

$$= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}}.$$

3) Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x_0 + \Delta x)x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}}$.

4) Вычислим предел этого отношения: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{x_0^2}} =$ $= \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$. Таким образом, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$.

Пример 3

Найдем производную функции $f(x) = \sin x$.

1) Найдем приращение функции: $\Delta f = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = $ $= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ (была использована формула разности синусов).

2) Составим разностное отношение: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3) Найдем производную: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$ $= 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$. Таким образом, было показано, что $f'(x) = \cos x$.

Подобным образом можно составить таблицу производных основных функций, которая и далее будет пополняться (и ее, разумеется, надо помнить).

$f(x)$	c	x	x^n	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2. Правила дифференцирования

Рассмотрим правила, по которым можно дифференцировать сумму, произведение, частное функций.

Правило 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то и их сумма дифференцируема в точке x, причем производная суммы равна сумме производных: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

Пример 4

Докажем правило 1.

1) Сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ также является функцией $h(x) = f(x) + g(x)$.

2) Найдем приращение функции $h(x)$: $\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) = (f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)) - (f(x)+g(x)) = (f(x+\Delta x)-f(x)) + (g(x+\Delta x)-g(x)) = \Delta f + \Delta g$.

3) Определим отношение приращения функции Δh к приращению аргумента Δx: $\dfrac{\Delta h}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$.

4) Найдем предел этого отношения: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}+\dfrac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x)+g'(x)$.

5) Таким образом, показано, что $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

Пример 5

Найдем производную функции $h(x) = x^7 + \sin x - \operatorname{tg} x$.

Используя правило 1, получим: $h'(x) = (x^7+\sin x - \operatorname{tg} x)' = (x^7)' + (\sin x)' - (\operatorname{tg} x)' = 7x^6 + \cos x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Правило 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то и функция $kf(x)$ дифференцируема в точке x, причем $(kf(x))' = kf'(x)$. Другими словами, постоянный множитель k можно вынести за знак производной.

Пример 6

Докажем правило 2.

Используем ту же схему доказательства, как и для правила 1.

1) Произведение $kf(x)$ также является функцией $h(x) = kf(x)$.

2) Найдем приращение функции $h(x)$: $\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x) = kf(x+\Delta x) - kf(x) = k(f(x+\Delta x) - f(x)) = k\Delta f$.

3) Определим отношение приращения функции Δh к приращению аргумента Δx: $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{k\Delta f}{\Delta x} = k\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

4) Найдем предел этого отношения: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(k\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) =$

$= k\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = kf'(x)$.

5) Показано, что $(kf(x))' = kf'(x)$.

Пример 7

Найдем производную функции:

а) $h(x) = 5\operatorname{ctg} x$;

б) $h(x) = 3\sqrt{x} - 2\cos x + 4\sqrt[3]{x}$.

а) Используем правило 2 и получим: $h'(x) = (5\operatorname{ctg} x)' = 5(\operatorname{ctg} x)' =$

$= 5\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{5}{\sin^2 x}$.

б) Применим правила 1, 2 и получим: $h'(x) = (3\sqrt{x} - 2\cos x + 4\sqrt[3]{x})' =$

$= (3\sqrt{x})' - (2\cos x)' + (4\sqrt[3]{x})' = 3(\sqrt{x})' - 2(\cos x)' + 4(\sqrt[3]{x})' =$

$= 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2(-\sin x) + 4\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2\sin x + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Правило 3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то и их произведение дифференцируемо в точке x, причем $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Другими словами, производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

Это и следующие правила доказывать не будем. Данное доказательство аналогично доказательству правил 1 и 2, но технически сложнее.

Пример 8

Найдем производную функции $g(x) = x^3\operatorname{tg} x$.

В соответствии с правилом 3 получим: $h'(x) = (x^3\operatorname{tg} x)' = (x^3)'\operatorname{tg} x +$

$+ x^3(\operatorname{tg} x)' = 3x^2\operatorname{tg} x + x^3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3x^2\sin x}{\cos x} + \frac{x^3}{\cos^2 x} = \frac{x^2(3\sin x\cos x + x)}{\cos^2 x}$.

Заметим, что правило 2 является следствием правила 3. Действительно, если функция $g(x) = k$ – постоянное число, то по правилу 3 получим: $(kf(x))' = k'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x)$ – правило 2.

Правило 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке x, причем $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Пример 9

Найдем производную функции $h(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$.

По правилу 4 находим: $h'(x) = \left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)' = \dfrac{(x^2)'\sin x - x^2(\sin x)'}{\sin^2 x} =$

$= \dfrac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{x(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$.

Отметим, что правило 4 может быть использовано для нахождения производных основных изучаемых функций.

Пример 10

Найдем производную функции $h(x) = \operatorname{ctg} x$.

Запишем функцию в виде $h(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ и используем правило 4. Получим: $h'(x) = \left(\dfrac{\cos x}{\sin}\right)' = \dfrac{(\cos x)'\sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} =$

$= -\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Таким образом, получили, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ (см. таблицу производных).

3. Дифференцирование функции $y = f(kx + m)$

До сих пор рассматривались производные элементарных функций с аргументом x. Их нахождение труда не вызывает. Например, для функции $y = x^2$ производная $y' = 2x$. Но для функции $y = (2x + 3)^2$ уже возникают некоторые затруднения. Однако данное выражение можно возвести в квадрат: $y = 4x^2 + 12x + 9$ и найти производную

$y' = 4 \cdot 2x + 12 = 4(2x + 3)$. Для функции $y = (2x + 3)^{40}$ начинаются уже настоящие проблемы, так как возвести выражение в степень 40 нереально и применить предыдущий подход не удается. Поэтому для подобных ситуаций существует следующий алгоритм.

Правило 5. Производная функции $f(kx+m)$ вычисляется по формуле $(f(kx+m))' = kf'(kx+m)$.

Пример 11

Найдем производную функции:

а) $h(x) = (2x+3)^{40}$;

б) $h(x) = \operatorname{tg}\left(5x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Применим правило 5.

а) В этом случае $kx+m = 2x+3$, т. е. $k = 2$ и $m = 3$. Тогда получим: $h'(x) = ((2x+3)^{40})' = 2 \cdot 40 \cdot (2x+3)^{39} = 80(2x+3)^{39}$.

б) Имеем: $kx+m = 5x - \dfrac{\pi}{6}$, т. е. $k = 5$ и $m = -\dfrac{\pi}{6}$. Находим производную: $h'(x) = \left(\operatorname{tg}\left(5x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right)' = 5 \cdot \dfrac{1}{\cos^2\left(5x - \dfrac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{5}{\cos^2\left(5x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$.

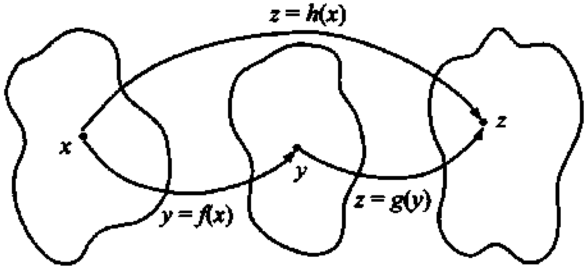
Теперь обобщим правило 5. Дело в том, что функция $f(kx+m)$ – частный случай сложной функции, так как ее аргумент $kx+m$ является, в свою очередь, линейной функцией переменной x.

Подавляющее большинство изучаемых функций являются *сложными*, например функции $\sqrt{x^3+2x}$, $(x^2+x)^3$, $\sin 3x$, $\operatorname{tg} x^2$; $\cos^5 x$, $\arcsin(x^2+1)$, $\operatorname{arctg}(3x+1)$. Разберемся с *понятием сложной функции*. Начнем с примера.

Пример 12

Вычислим по заданному значению x соответствующее значение z функции h, заданной формулой $z = h(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$. Для этого сначала вычислим по заданному значению x значение $y = f(x) = 1 + x^2$. Потом по этому значению y найдем: $z = g(y) = \sqrt[3]{y}$.

Таким образом, функция $f(x)$ ставит в соответствие числу x число y, а функция $g(y)$ – числу y число z. Совокупность этих операций называют *сложной функцией* $h(x)$, составленной из функций $g(y)$ и $f(x)$, и записывают: $h(x) = g(f(x))$.



Чтобы вычислить значение сложной функции $h(x) = g(f(x))$ в произвольной точке x, сначала вычисляют значение y «внутренней» функции f в этой точке, а затем значение z функции g.

Теперь остановимся на *производной сложной функции*. Для ее вычисления существует *правило*.

Правило 6. Производная сложной функции $h(x) = g(f(x))$ вычисляется по формуле $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Пример 13

Найдем производную функции:

а) $h(x) = f(ax+b)$;

б) $h(x) = f(ax^2+bx+c)$;

в) $h(x) = f(ax^3+bx^2+cx+d)$.

Используем правило 6 и получим:

а) $h'(x) = f'(ax+b)\cdot(ax+b)' = f'(ax+b)\cdot a = af'(ax+b)$ – сравните с правилом 5;

б) $h'(x) = f'(ax^2+bx+c)\cdot(ax^2+bx+c)' = f'(ax^2+bx+c)\cdot(2ax+b) =$
$= (2ax+b)f'(ax^2+bx+c)$;

в) $h'(x) = f'(ax^3+bx^2+cx+d)\cdot(ax^3+bx^2+cx+d)' =$
$= f'(ax^3+bx^2+cx+d)\cdot(3ax^2+2bx+c) = (3ax^2+2bx+c)f'(ax^3+bx^2+cx+d)$.

Пример 14

Найдем производную функции $h(x) = (3x^2+4x)^{83}$.

Функция $h(y)$ является сложной $h(x) = g(f(x))$, где $g(y) = y^{83}$ и $y = f(x) = 3x^2+4x$. Тогда $f'(x) = (3x^2+4x)' = 6x+4$ и $g'(y) = (y^{84})' = 83y^{82}$. Поэтому получим: $h'(x) = 83y^{82}\cdot(6x+4) = 83(3x^2+4x)^{82}\cdot(6x+4)$.

Пример 15

Найдем производную функции $h(x) = \cos(5x^3+2x)$.

Функция $h(x)$ является сложной $h(x) = g(f(x))$, где $g(x) = \cos y$ и $y = f(x) = 5x^3 + 2x$. Тогда $f'(x) = (5x^3 + 2x)' = 5 \cdot 3x^2 + 2 = 15x^2 + 2$ и $g'(y) = (\cos y)' = -\sin y$. Тогда получим: $h'(x) = -\sin y \cdot (15x^2 + 2) = = -\sin(5x^3 + 2x) \cdot (15x^2 + 2)$.

IV. Контрольные вопросы (фронтальный опрос)

1. Производные основных функций (таблица производных).
2. Правила дифференцирования.
3. Понятие сложной функции.
4. Производная сложной функции.

V. Задание на уроках

§ 28, № 5 (а, б); 8 (в, г); 9 (а, б); 13 (в, г); 15 (а); 17 (а, б); 18 (в, г); 23 (а, б); 25 (а); 27 (б); 28 (а); 30 (в, г); 43 (а, б); 44 (в, г).

VI. Задание на дом

§ 28, № 5 (в, г); 8 (а, б); 9 (в, г); 13 (а, б); 15 (в); 17 (в, г); 18 (а, б); 23 (в, г); 25 (б); 27 (а); 28 (б); 30 (а, б); 43 (в, г); 44 (а, б).

VII. Творческое задание

Найдите производную сложной функции:

а) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;
б) $y = \sqrt{2x^3 - 1}$;
в) $y = (x^5 + 1)^4$;
г) $y = (x^3 - 2)^{10}$;
д) $y = \operatorname{tg}(x^3 + 2)$;
е) $y = \sin(3x^2 + 5)$;
ж) $y = \sin^3 x$;
з) $y = \operatorname{tg}^4 x$;
и) $y = \sqrt{\cos x}$;
к) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$;
л) $y = \sin\sqrt{x^2 + 1}$;
м) $y = \operatorname{tg}^2(3x^2 - 1)$.

Ответы: а) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; б) $y' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$; в) $y' = 20x^4(x^5 + 1)^3$; г) $y' = 30x^2(x^3 - 2)^9$; д) $y' = \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3 + 2)}$; е) $y' = 6x\cos(3x^2 + 5)$; ж) $y' = 3\sin^2 x\cos x$; з) $y' = \dfrac{4\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$; и) $y' = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$; к) $y' = -\dfrac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$; л) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\cos\sqrt{x^2 + 1}$; м) $y' = \dfrac{12x\sin(3x^2 - 1)}{\cos^3(3x^2 - 1)}$.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 70–71. Уравнение касательной к графику функции

Цель: получить уравнение касательной к графику функции.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Найдите производную функции $y = 3x^4 - 2\cos x$.

Ответ: а) $y' = 3x^3 - 2\sin x$; б) $y' = 12x^3 - 2\sin x$; в) $y' = 12x^3 + 2\sin x$; г) $y' = 3x^3 + 2\sin x$.

2. Вычислите значение производной функции $y = \sqrt{x}\cos x$ в точке $x = \pi$.

Ответ: а) $-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$; б) $2\sqrt{\pi}$; в) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; г) $-\sqrt{\pi}$.

3. Решите уравнение $y'(x) = 0$, если $y(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2x$.

Ответ: а) πn; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\frac{2\pi}{3} + \pi n$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $y = 5x^6 + 3\sin x$.

Ответ: а) $y' = 30x^5 - 3\cos x$; б) $y' = 30x^5 + 3\cos x$; в) $y' = 5x^5 + 3\cos x$; г) $y' = 30x^6 - 3\cos x$.

2. Вычислите значение производной функции $y = \sqrt{x}\sin x$ в точке $x = \pi$.

Ответ: а) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$; б) $\sqrt{\pi}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$; г) $-\sqrt{\pi}$.

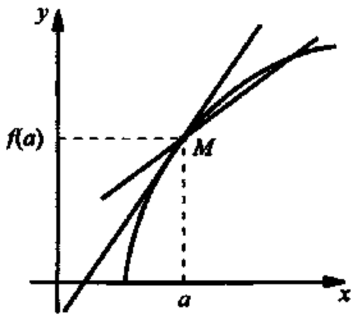
3. Решите уравнение $y'(x) = 0$, если $y(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 2x$.

Ответ: а) $-\frac{3\pi}{8} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi n$.

III. Изучение нового материала

Наконец перейдем к заключительному этапу изучения производной и рассмотрим на оставшихся занятиях *применение* производной. На этом занятии обсудим касательную к графику функции.

Понятие касательной уже рассматривалось ранее. Было показано, что график дифференцируемой в точке a функции $f(x)$ вблизи a практически не отличается от графика касательной, а значит, он близок к секущей, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(a + \Delta x; f(a + \Delta x))$. Любая из таких секущих проходит через точку $M(a; f(a))$. Чтобы написать уравнение касательной, надо задать ее угловой коэффициент. Угловой коэффициент секущей $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к числу $f'(a)$, которое является *угловым коэффициентом касательной*. Поэтому говорят, что *касательная есть предельное положение секущей* при $\Delta x \to 0$.



Теперь получим *уравнение касательной* к графику функции $f(x)$. Так как касательная является прямой и ее угловой коэффициент $f'(a)$, то можно записать ее уравнение $y = f'(a)\cdot x + b$. Найдем коэффициент b из условия, что касательная проходит через точку $M(a; f(a))$. Подставим координаты этой точки в уравнение касательной и получим: $f(a) = f'(a)\cdot a + b$, откуда $b = f(a) - f'(a)\cdot a$. Теперь подставим найденное значение b в уравнение касательной и получим: $y = f'(a)\cdot x + \ + f(a) - f'(a)\cdot a$ или $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Это и есть *уравнение касательной*. Обсудим применение уравнения касательной.

Пример 1

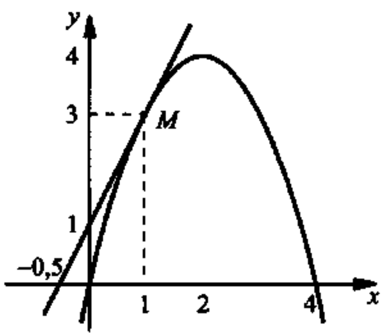
Под каким углом синусоида $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

Угол, под которым график данной функции пересекает ось абсцисс, равен углу наклона α касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в этой точке. Найдем производную: $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x\cdot 3=\sqrt{3}\cos 3x.$ Учитывая геометрический смысл производной, имеем: $\operatorname{tg}\alpha=f'(a)=f'(0)=\sqrt{3}\cos 0=\sqrt{3}$ и $\alpha=60^\circ$.

Пример 2

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x)=-x^2+4x$ в точке $a=1$.

Найдем производную данной функции: $f'(x)=(-x^2+4x)'=-2x+4.$ Вычислим значения производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке $a=1$ и получим: $f'(a)=f'(1)=-2\cdot 1+4=2$ и $f(a)=f(1)=-1^2+$ $+4\cdot 1=3$. Подставим эти величины в уравнение касательной. Имеем: $y=2(x-1)+3$ или $y=2x+1$.



Для наглядности на рисунке приведены график функции $f(x)$ и касательная к этой функции. Касание происходит в точке $M(1; 3)$.

На основе примеров 1 и 2 можно сформулировать *алгоритм получения уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$*:

1) обозначить абсциссу точки касания буквой a;

2) вычислить $f(a)$;

3) найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$;

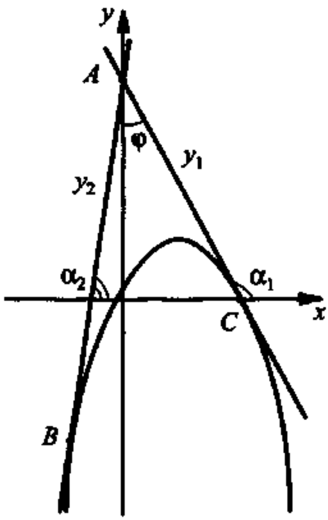
4) подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Заметим, что изначально точка a может быть неизвестна и ее приходится искать из условий задачи. Тогда в алгоритме в п. 2 и 3 слово «вычислить» надо заменить словом «записать» (что иллюстрирует пример 3).

В примере 2 абсцисса a точки касания была задана напрямую. Во многих случаях *точка касания* определяется *различными дополнительными условиями*.

Пример 3

Напишем уравнения касательных, проведенных из точки $A(0; 4)$ к графику функции $f(x) = -x^2 + 2x$.



Легко проверить, что точка A не лежит на параболе. Вместе с тем неизвестны точки касания параболы и касательных, поэтому для нахождения этих точек будет использовано дополнительное условие – прохождение касательных через точку A.

Предположим, что касание происходит в точке a. Найдем производную функции: $f'(x) = (-x^2 + 2x)' = -2x + 2$. Вычислим значения производной $f'(x)$ и самой функции $f(x)$ в точке касания a и получим: $f'(a) = -2a + 2$ и $f(a) = -a^2 + 2a$. Подставим эти величины в уравнение касательной. Имеем: $y = (-2a + 2)(x - a) + (-a^2 + 2a)$ или $y = (-2a + 2)x + a^2$. Это уравнение касательной.

Запишем условие прохождения касательной через точку A, подставив координаты этой точки. Получим: $4 = (-2a + 2) \cdot 0 + a^2$ или $4 = a^2$, откуда $a = \pm 2$. Таким образом, касание происходит в двух точках $B(-2; -8)$ и $C(2; 0)$. Поэтому таких касательных будет две. Найдем их уравнения. Подставим значения $a = \pm 2$ в уравнение касательной. Получим: при $a = 2$ $y_1 = (-2 \cdot 2 + 2)x + 2^2$ или $y_1 = -2x + 4$;

при $a = -2$ $y_2 = (-2\cdot(-2)+2)x+(-2)^2$ или $y_2 = 6x+4$. Итак, уравнения касательных $y_1 = -2x+4$ и $y_2 = 6x+4$.

Пример 4

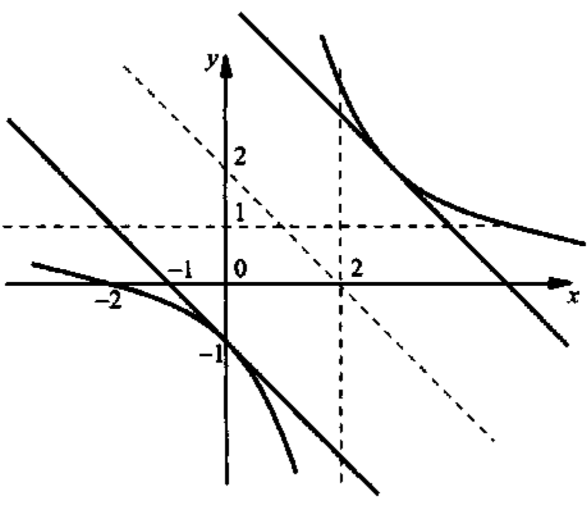
Найдем угол между касательными, используя условия предыдущей задачи.

Проведенные касательные $y_1 = -2x+4$ и $y_2 = 6x+4$ составляют с положительным направлением оси абсцисс углы α_1 и α_2 (причем $\operatorname{tg}\alpha_1 = -2$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = 6$) и между собой угол $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$. Найдем, используя известную формулу, $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2} =$

$= \dfrac{-2-6}{1+(-2)\cdot 6} = \dfrac{8}{11}$, откуда $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{8}{11}$.

Пример 5

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$, параллельной прямой $y = -x+2$.



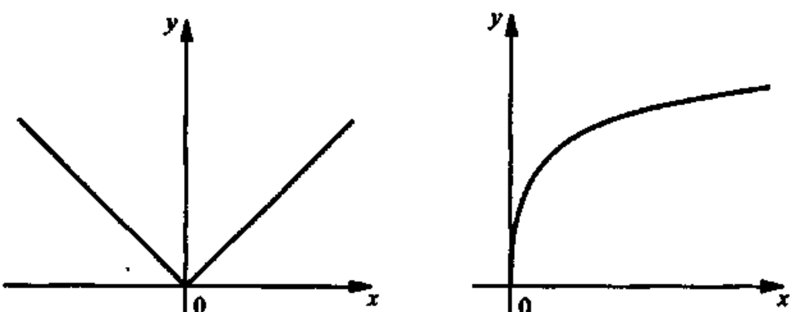
Две прямые параллельны друг другу, если они имеют равные угловые коэффициенты. Угловой коэффициент прямой $y = -x + 2$ равен -1, угловой коэффициент искомой касательной равен $f'(a)$, где a — абсцисса точки касания. Поэтому для определения a имеем дополнительное условие $f'(a) = -1$.

Используя формулу для производной частного функций, найдем производную: $f'(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)'=\dfrac{(x+2)'(x-2)-(x+2)(x-2)'}{(x-2)^2}=$ $=\dfrac{x-2-(x+2)}{(x-2)^2}=-\dfrac{4}{(x-2)^2}$. Найдем значение производной в точке a и получим: $f'(a)=-\dfrac{4}{(a-2)^2}$.

Получим уравнение $-1=-\dfrac{4}{(a-2)^2}$, или $(a-2)^2=4$, или $a-2=\pm2$, откуда $a=4$ и $a=0$. Таким образом, существуют две касательные, удовлетворяющие условию задачи. Подставим значения $a=4$ и $a=0$ в уравнение касательной $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. При $a=4$ имеем: $f(4)=\dfrac{4+2}{4-2}=3$, и касательная $y_1=-(x-4)+3$ или $y_1=-x+7$. При $a=0$ получим: $f(0)=\dfrac{0+2}{0-2}=-1$, и касательная $y_2=-(x-0)-1$ или $y_2=-x-1$. Итак, уравнения касательных $y_1=-x+7$ и $y_2=-x-1$.

Заметим, что если $f'(a)$ *не существует*, то *касательная* или *не существует* (как у функции $f(x)=|x|$ в точке (0; 0) – рис. *а*, или *вертикальна* (как у функции $f(x)=\sqrt{x}$ в точке (0; 0) – рис. *б*.

а *б*



Итак, *существование производной* функции $f(x)$ в точке a *эквивалентно существованию невертикальной касательной* в точке $(a; f(a))$ графика. При этом *угловой коэффициент касательной* равен $f'(a)$. В этом заключается *геометрический смысл производной*.

Понятие производной позволяет проводить *приближенные вычисления*. Уже неоднократно отмечалось, что при $\Delta x \to 0$ *значения функции* $f(x)$ *и касательной* к ней $y(x)$ практически *совпадают*. Поэтому при $\Delta x \to 0$ поведение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 *приближенно* можно описать *формулой* $f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot \Delta x$ (фактически уравнение касательной). Эта формула с успехом используется для приближенных вычислений.

Пример 6

Вычислим значение функции $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ в точке $x = 2{,}03$.

Найдем производную данной функции: $f'(x) = 12x^2 - 4x + 3$. Будем считать, что $x = a + \Delta x$, где $a = 2$ и $\Delta x = 0{,}03$. Вычислим значения функции и ее производной в точке a и получим: $f(a) = 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 35$ и $f'(a) = 12 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 43$. Теперь определим значение функции в заданной точке $x = 2{,}03$. Имеем: $f(2{,}03) = 35 + 43 \cdot 0{,}03 = 35 + 1{,}29 = 36{,}29$.

Разумеется, приведенную формулу удобно использовать, если значения $f(a)$ и $f'(a)$ легко вычислить.

Пример 7

Вычислим $\sqrt[3]{8{,}03}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Найдем производную: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Будем считать, что $x = a + \Delta x$, где $a = 8$ и $\Delta x = 0{,}03$. Вычислим значения функции и ее производной в точке a и получим: $f(a) = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{8} = 2$ и $f'(a) = \dfrac{1}{3 \cdot 2^2} = \dfrac{1}{12}$. Теперь определим значение функции в заданной точке $x = 8{,}03$. Имеем: $f(8{,}03) = 2 + \dfrac{1}{12} \cdot 0{,}03 = 2 + 0{,}0025 = 2{,}0025$.

Пример 8

Обобщим полученный результат. Рассмотрим степенную функцию $f(x) = x^n$ и будем считать, что $x = a + \Delta x$ и $\Delta x \to 0$. Найдем $f'(x) = nx^{n-1}$ и вычислим значения функции и ее производной в точке a, получим: $f(a) = a^n$ и $f'(a) = na^{n-1}$. Теперь имеем формулу $f(x) = a^n + na^{n-1}\Delta x$. Применим ее для вычисления числа $0{,}98^{-20}$. Будем считать, что $a = 1$, $\Delta x = -0{,}02$ и $n = -20$. Тогда получим: $0{,}98^{-20} = 1^{-20} - 20 \cdot 1^{-21} \cdot (-0{,}02) = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$.

Разумеется, приведенную формулу можно использовать и для *любых* других *функций*, в частности тригонометрических.

Пример 9

Вычислим $\operatorname{tg} 48^\circ$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ и найдем производную: $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Будем считать, что $x = a + \Delta x$, где $a = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$ и $\Delta x = 3^\circ = 3 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{60}$ (еще раз обратим внимание на то, что в тригонометрии углы обычно измеряют в радианах). Найдем значения функции и ее производной в точке a и получим: $f(a) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ и $f'(a) = f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{\pi}{4}} = 2$. Теперь вычислим $\operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{60}\right) = 1 + 2 \cdot \dfrac{\pi}{60} = 1 + \dfrac{\pi}{30} \approx 1 + 0{,}105 = 1{,}105$ (учтено, что $\pi \approx 3{,}14$).

IV. Контрольные вопросы

1. Уравнение касательной к графику функции.
2. Алгоритм выведения уравнения касательной.
3. Геометрический смысл производной.
4. Применение уравнения касательной для приближенных вычислений.

V. Задание на уроках

§ 29, № 1 (а); 2 (б); 5 (а, б); 6 (в, г); 9 (а); 10 (б); 12 (г); 14 (а); 17; 21 (а); 22 (а, в); 24 (а, б); 25 (а); 26.

VI. Задание на дом

§ 29, № 1 (б); 2 (в); 5 (в, г); 6 (а, б); 9 (б); 10 (а); 12 (б); 14 (б); 18; 21 (в); 22 (б, г); 24 (в, г); 25 (б); 27.

VII. Творческие задания

1. В каких точках x касательные к графикам функций $y = x^3 - x^2 - x - 4$ и $y = \dfrac{2}{3}x^3 + 2x$ параллельны?

Ответ: $x = -1$, $x = 3$.

2. При каких x касательные к графикам функций $y = 3\cos 5x - 7$ и $y = 5\cos 3x + 4$ параллельны?

Ответ: $x = \pi n$ и $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{4}n$, где $n \in Z$.

3. Под какими углами пересекаются кривые $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$?

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

4. Под какими углами пересекаются кривые $y = \cos x$ и $y = \sin x$?

Ответ: $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

5. К параболе $y = 4 - x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью ординат.

Ответ: (0; 5).

6. К параболе $y = 4x - x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью абсцисс.

Ответ: $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$.

7. Найдите угол между двумя касательными, проведенными из точки (0; −2) к параболе $y = x^2$.

Ответ: $\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{8}$.

8. К графику функции $y = 3x^2 + 3x + 2$ проведены касательные с угловыми коэффициентами $k_1 = 0$ и $k_2 = 15$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки касания.

Ответ: $y = 12x - 4$.

9. Найдите уравнения прямых, касающихся одновременно парабол $y = x^2 + x - 2$ и $y = -x^2 + 7x - 11$.

Ответ: $y = 7x - 11$ и $y = x - 2$.

10. Напишите уравнение общей касательной к параболам $y = -3x^2 + 4x + 4$ и $y = -3x^2 + 16x - 20$.

Ответ: $y = -2x + 7$.

11. Касательная к графику функции $y = x^2 - 4x - 3$ проведена в точке $x = 0$. Найдите площадь треугольника, образованного касательной и осями координат.

Ответ: $\frac{9}{8}$.

12. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \sqrt{2x^2 - 4}$ в точке $x = 2$.

Ответ: 1.

VIII. Подведение итогов уроков

Уроки 72–73. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы

Цель: использовать производную для анализа функций.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Напишите уравнение касательной к параболе $f(x)=2x^2-4x+7$ в точке с абсциссой $x_0=4$.

Ответ: а) $y=8x-12$; б) $y=12x-25$; в) $y=16x-8$; г) $y=2x-3$.

2. Найдите угол между касательными, проведенными из точки $A(0; -6)$ к кривой $f(x)=2x^2+2$.

Ответ: а) arctg 6; б) π – arctg 8; в) π – 2 arctg 8; г) arctg 4.

Вариант 2

1. Напишите уравнение касательной к параболе $f(x)=3x^2+x-4$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Ответ: а) $y=18x-15$; б) $y=12x-21$; в) $y=19x-31$; г) $y=6x-7$.

2. Найдите угол между касательными, проведенными из точки $A(0; -2)$ к кривой $f(x)=3x^2+1$.

Ответ: а) arctg 3; б) π – 2 arctg 6; в) π – arctg 6; г) arctg 5.

III. Изучение нового материала

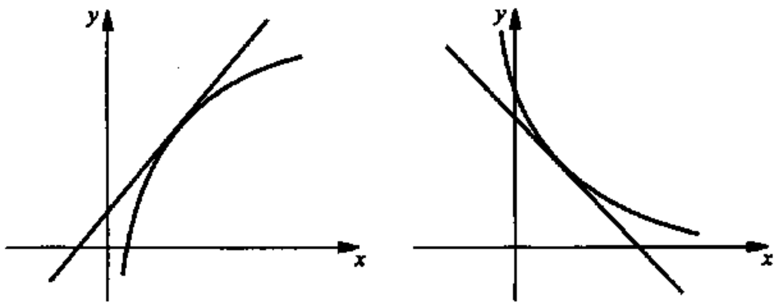
Продолжим изучать применение производной к анализу функций и построению их графиков.

1. Исследование функций на монотонность

Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение *промежутков монотонности* функции (т. е. *промежутков* ее *возрастания и убывания*). Такой анализ легко выполнить с помощью производной. Сформулируем *теоремы о возрастании и убывании* функции.

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x)=0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y=f(x)$ *возрастает на промежутке* X.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \le 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.



Возрастающая функция, $f'(x) \ge 0$ Убывающая функция, $f'(x) \le 0$

Пример 1

Исследуем на монотонность функцию $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 4x$.

Найдем производную функции: $f'(x) = 15x^4 + 6x^2 + 4$. Видно, что при всех значениях x производная $f'(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

Пример 2

Докажем, что функция $f(x) = 3\cos 2x - 10x$ убывает на всей числовой оси.

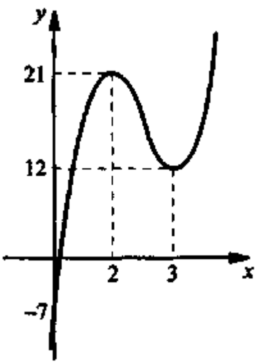
Производная данной функции $f'(x) = -6\sin 2x - 10$. Определим знак этого выражения. В силу ограниченности функции синуса выполняется неравенство $-1 \le \sin 2x \le 1$, тогда $6 \ge -6\sin 2x \ge -6$ и $-4 \ge -6\sin 2x \ge -16$. Таким образом, при всех значениях x производная $f'(x) < 0$. Поэтому данная функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси.

Пример 3

Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 7$. Построим график этой функции.

Найдем производную функции: $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$. Построим диаграмму знаков производной. Приравняем производную к нулю: $6(x^2 - 5x + 6) = 0$ – и найдем корни этого квадратного уравнения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Отметим их на числовой прямой и определим знаки производной. Видно, что на промежутках $(-\infty; 2]\cup[3; \infty)$ производная $f'(x) \geq 0$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[3; \infty)$. На промежутке $[2; 3]$ производная $f'(x) \leq 0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на промежутке $[2; 3]$.

Найдем значения функции в точках $x = 2$ и $x = 3$, а также в точке $x = 0$: $f(0) = -7$, $f(2) = 21$, $f(3) = 12$. Построим эти точки и учтем монотонность функции. Получим график данной функции.



Пример 4

При каких значениях параметра a функция $f(x) = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ убывает на числовой оси?

Найдем производную функции: $f'(x) = 3(a+2)x^2 - 6ax + 9a = 3((a+2)x^2 - 2ax + 3a)$. Функция $f(x)$ убывает на всей числовой оси, если ее производная $f'(x) \leq 0$ при всех значениях x. Получим неравенство $(a+2)x^2 - 2ax + 3a \leq 0$. Так как старший коэффициент $a + 2$ в неравенстве зависит от параметра a, то надо рассмотреть два случая.

1. Если $a + 2 = 0$ (т. е. $a = -2$), то неравенство становится линейным: $4x - 6 \leq 0$. Очевидно, что такое неравенство при всех значениях x не выполняется.

2. Если $a + 2 \neq 0$ (т. е. $a \neq -2$), то неравенство является квадратным. Оно выполняется при всех значениях x, если старший коэффициент $a + 2 < 0$ и дискриминант $D = (-2a)^2 - 4(a+2)\cdot 3a = 4(a^2 - 3a^2 - 6a) = -8(a^2 + 3a) \leq 0$. Получим систему неравенств $\begin{cases} a+2 < 0, \\ -8(a^2+3a) \leq 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} a+2<0, \\ a^2+3a \ge 0. \end{cases}$ Решая эти неравенства, имеем: $\begin{cases} a \in (-\infty; -2), \\ a \in (-\infty; -3] \cup [0; \infty), \end{cases}$

откуда $a \in (-\infty; -3]$. Итак, при $a \in (-\infty; -3]$ данная функция убывает на всей числовой оси.

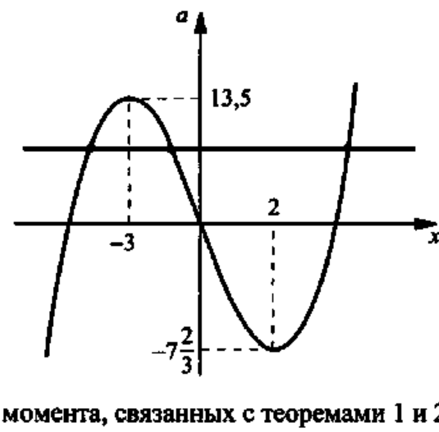
Разумеется, понятие *монотонности* функции оказывается полезным и *при исследовании корней уравнения*.

Пример 5

При каких значениях параметра a уравнение $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x = a$ имеет три корня?

Построим график зависимости $a(x)$. Найдем производную функции $a'(x) = x^2 + x - 6$. Приравняем производную нулю и получим квадратное уравнение $0 = x^2 + x - 6$, корни которого $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Отложим эти точки на числовой прямой и проставим знаки производной $a'(x)$.

Видно, что функция $a(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[2; \infty)$ и убывает на промежутке $[-3; 2]$. Найдем значения $f(-3) = 13{,}5$, $f(0) = 0$, $f(2) = -7\frac{2}{3}$. Построим эти точки и учтем монотонность функции. Получим график функции $a(x)$. Очевидно, что при $a \in \left(-7\frac{2}{3}; 13{,}5\right)$ данное уравнение имеет ровно три различных корня.



Отметим два момента, связанных с теоремами 1 и 2.

1) Рассматриваются только открытые промежутки X, т. е. интервал $(a; b)$ или открытые лучи $(-\infty; a)$ и $(a; +\infty)$. Если функция определена

на отрезке $[a; b]$, то в точках $x = a$ и $x = b$ приращение Δx может быть только одного знака (при $x = a$ $\Delta x > 0$, при $x = b$ $\Delta x < 0$). В определении производной ограничений на знак приращения Δx нет.

2) Производная $f'(x)$ может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек промежутка X. В них функция $y = f(x)$ или имеет минимум, или имеет максимум, или меняется направление кривизны графика функции. На вопрос, что будет, если на всем промежутке X выполняется тождество $f'(x) = 0$, отвечает следующая теорема.

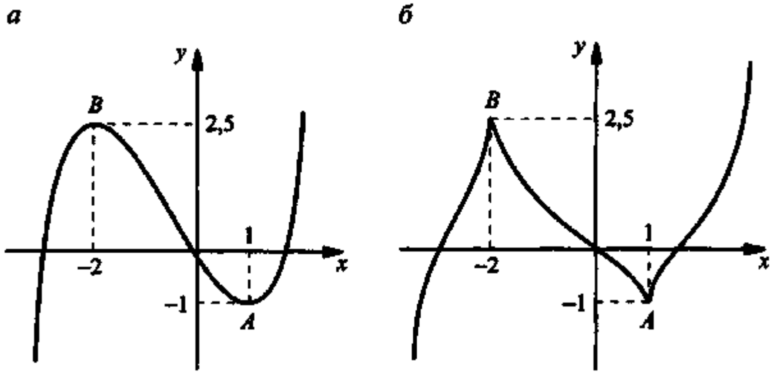
Теорема 3. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на промежутке X.

2. Точки экстремума функции и их нахождение

Сначала введем необходимые определения и понятия.

Определение 1. Точку $x = x_0$ называют точкой *минимума функции* $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение 2. Точку $x = x_0$ называют точкой *максимума функции* $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.



На приведенных рисунках функции имеют минимум $A(-1; -1)$ и максимум $B(-2; 2,5)$. Последим за абсциссами этих точек. Сначала рассмотрим точку A. Если рассмотреть окрестность точки $x_0 = 1$ (например, интервал $(0,5; 1,5)$), то для всех точек этой окрестности выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0) = -1$. Тогда точка $x_0 = 1$ – точка минимума. Обратимся к точке B. Если рассмотреть окрестность точки $x_0 = -2$ (например, интервал $(-3; -1)$), то для всех точек этой окрестности выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0) = 2,5$. Поэтому точка $x_0 = -2$ – точка максимума.

Значение функции в точке максимума обозначают «y_{max}» (при этом максимум носит *локальный характер*). Наибольшее значение функции в области определения обозначают «$y_{наиб}$» (*глобальный характер*). На приведенных рисунках $y_{max} = 2{,}5$, $y_{наиб}$ не достигается.

Если функция $y = f(x)$ достигает в точке x_0 максимума, то наименование «точка максимума» используют как для значения $x = x_0$, так и для точки $(x_0; f(x_0))$. Полностью аналогичная ситуация и терминология относятся к минимуму функции.

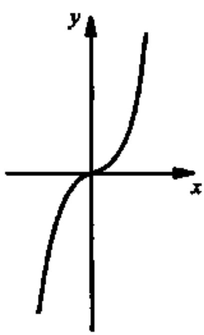
Точки максимума и минимума функции называют общим термином – *точки экстремума*.

На рисунках видно, что экстремум достигается в точке x_0, где производная $f'(x_0) = 0$ (рис. *а*), или производная не существует (рис. *б*). Это же подтверждает следующая теорема.

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции или равна нулю, или не существует.

В некоторых учебниках внутренние точки области определения функции, в которых *производная* функция *равна нулю*, называют *стационарными*, а внутренние точки области определения, в которых *функция непрерывна*, но *производная не существует*, – *критическими*. В других учебниках эти точки не различают и называют *критическими*.

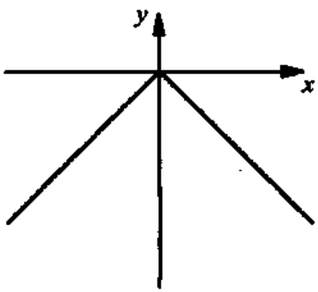
Заметим, что теорема 4 является только *необходимым* (*но не достаточным*) условием экстремума: из того, что производная $f'(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, не обязательно следует, что в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум. Например, функция $f(x) = x^5$ имеет производную $f'(x) = 5x^4$, которая обращается в нуль в точке $x_0 = 0$. Однако *экстремума* в этой точке функция $f(x)$ *не имеет* (происходит изменение кривизны кривой).



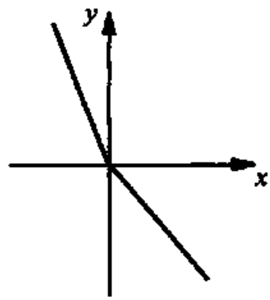
д)

Теперь рассмотрим критические точки, в которых производная не существует. Для функции $f(x)=\sqrt[4]{x}$ производная $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, которая не существует в точке $x_0 = 0$. Но эта точка не является критической, так как это не внутренняя точка области определения.

Для функций $f(x)=-|x|$ и $f(x)=|x|-2x$ точка $x_0 = 0$ является внутренней точкой области определения, и в точке x_0 производная этих функций не существует. Однако функция $f(x)=-|x|$ в точке x_0 имеет максимум, функция $f(x)=|x|-2x$ в точке x_0 экстремума не имеет.



$f(x)=-|x|$



$f(x)=|x|-2x$

После приведенных примеров необходимо рассмотреть *достаточные условия экстремума*.

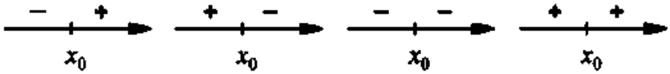
Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f(x) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет (происходит изменение кривизны графика функции).

Для иллюстрации и запоминания теоремы 5 приведем диаграмму.



min max Экстремума нет

Для исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы приведем *алгоритм*.

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$.

3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.

4. Сделать выводы о монотонности и точках экстремума функции.

Проиллюстрируем этот алгоритм примерами.

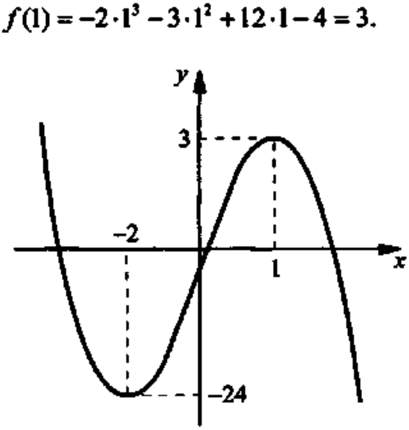
Пример 6

Найдем экстремумы функции $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$.

Найдем производную функции: $f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x^2 + x - 2)$.

Приравняем производную нулю: $6(x^2 + x - 2) = 0$, решим это квадратное уравнение и найдем стационарные точки функции $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Отметим стационарные точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$.

Видно, что в точке $x = -2$ знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому критическая точка $x = -2$ – точка минимума. Найдем минимум функции: $f_{\min} = f(-2) = -2\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 12\cdot(-2) - 4 = -24$. В точке $x = 1$ знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому критическая точка $x = 1$ – точка максимума. Найдем максимум функции: $f_{\max} = f(1) = -2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 12\cdot 1 - 4 = 3$.



Построим экстремумы функции и нарисуем график данной функции (рисунок приведен с искажением масштаба).

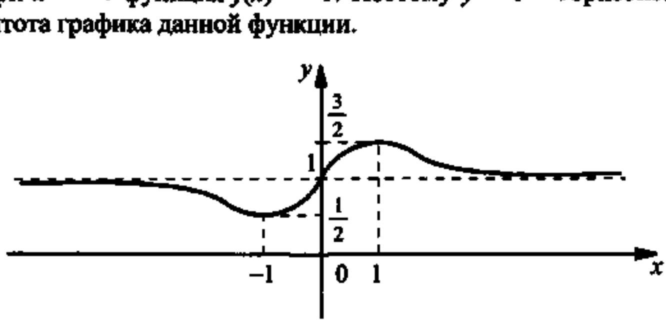
Пример 7

Найдем множество значений функции $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

Данная функция определена на всей числовой оси. Вычислим экстремумы этой функции. Найдем производную функции: $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{(x^2+x+1)'(x^2+1)-(x^2+x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$=\dfrac{(2x+1)(x^2+1)-(x^2+x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$. Приравняем производную нулю, получим уравнение $1-x^2=0$ и найдем стационарные точки функции $x=\pm1$.

Отметим стационарные точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$. Видно, что в точке $x=-1$ знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому $x=-1$ – точка минимума и $f_{\min}(x)=f(-1)=\dfrac{1}{2}$. В точке $x=1$ знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому это точка максимума и $f_{\max}(x)=f(1)=\dfrac{3}{2}$. Отметим эти точки, а также точку пересечения с осью ординат. Запишем функцию в виде $f(x)=1+\dfrac{x}{x^2+1}$. Видно, что при $x\to\infty$ функция $f(x)\to1$. Поэтому $y=1$ – горизонтальная асимптота графика данной функции.



Построим график этой функции. Получим, что значения функции $\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{3}{2}$. Поэтому множество значений функции $E(f)=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

IV. Контрольные вопросы

1. Определение возрастающей (убывающей) функции.
2. Теорема о возрастании (убывании) функции.
3. Точка минимума (максимума) функции.
4. Теорема об экстремуме функции.
5. Стационарные и критические точки производной.
6. Достаточные условия экстремума функции.
7. Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

V. Задание на уроках

§ 30, № 1 (а); 2 (б); 3 (а, б); 4; 8 (в, г); 9 (а, б); 13 (в, г); 16 (а, б); 17 (в); 18 (а); 19 (в); 23 (а); 24 (а); 26 (в, г); 30 (а); 31 (б); 32 (а).

VI. Задание на дом

§ 30, № 1 (б); 2 (а); 3 (в, г); 5; 8 (а, б); 9 (в, г); 13 (а, б); 16 (в, г); 17 (а); 18 (в); 19 (г); 23 (б); 24 (б); 26 (а, б); 30 (б); 31 (а); 32 (б).

VII. Творческое задание

Найдите стационарные точки функции:

1) $f(x)=\frac{1}{5}(5x+7)^{3/2}-\frac{1}{2}(3x+1)^{3/2}-(x+3)^{3/2}$.

Ответ: $-\frac{1}{11}$.

2) $f(x)=\frac{1}{5}(5x+7)^{3/2}-(5x-12)^{3/2}-\frac{15}{2}x$.

Ответ: -3; 4.

3) $f(x)=\cos x-3\sin 2x+5x+\sqrt{3}$.

Ответ: $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$; $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4}+\pi k$, где $n, k\in Z$.

4) $f(x)=\sin x-\cos x+\frac{\sqrt{2}}{5}\cos 5x$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$, где $n, k\in Z$.

5) $f(x)=\sin 6x-3\cos 2x+3$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{3}n$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k$, где $n, k\in Z$.

VIII. Подведение итогов уроков

Урок 74. Построение графиков функций

Цель: использовать производную для исследования функции и построения ее графика.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Дайте полную и упрощенную формулировки признака максимума функции.

2. Определите точки максимума и минимума и промежутки монотонности функции $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.

3. Найдите стационарные точки функции $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$.

Вариант 2

1. Дайте полную и упрощенную формулировки признака минимума функции.

2. Определите точки максимума и минимума и промежутки монотонности функции $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3$.

3. Найдите стационарные точки функции $f(x) = 42\cos 5x + 30\cos 7x - 35\cos 6x$.

III. Изучение нового материала

При *исследовании* функции и *построении* ее *графика* надо:

1. Найти *область определения.*

2. Выяснить *особенности* (четность или нечетность функции, периодичность и т. д.).

3. Найти *точки пересечения* графика *с осями координат*.

4. Найти *промежутки знакопостоянства.*

5. Выяснить с помощью производной *монотонность* функции, *промежутки возрастания и убывания.*

6. Используя производную, найти *точки экстремума и значения функции* в этих *точках.*

7. Определить вертикальные, горизонтальные или наклонные *асимптоты*, исследовав поведение функции в окрестности особых точек и при больших по модулю x.

Рассмотрим применение этого плана для исследования функции и построения ее графика.

Пример 1

Исследуем функцию $f(x)=x^2(x-2)^2$ и построим ее график.

1. Область определения $D(f)=R$, так как $f(x)$ – многочлен.

2. Функция определенной четности не имеет.

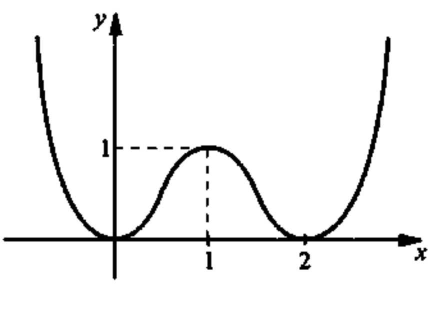
3. График касается оси абсцисс в точках $x=0$ и $x=2$.

4. При всех значениях x функция $f(x)\geq 0$.

5, 6. Найдем производную функции: $f'(x)=2x(x-2)^2+x^2\cdot 2(x-2)=$ $=2x(x-2)(x-2+x)=4x(x-2)(x-1)$. Производная существует при всех значениях x и обращается в нуль при $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=2$ (стационарные точки). Отметим эти точки на числовой оси и нарисуем диаграмму знаков производной.

Видно, что промежутки убывания функции $(-\infty;\ 0]$ и $[1;\ 2]$ и промежутки возрастания $[0;\ 1]$ и $[2;\ \infty)$. В точках $x=0$ и $x=2$ функция имеет минимум и $f_{\min}=f(0)=f(2)=0$. В точке $x=1$ функция имеет максимум и $f_{\max}=f(1)=1$.

7. Асимптот график функции не имеет. Учитывая проведенное исследование функции, нарисуем ее график.



Пример 2

Проведем исследование и построим график функции $f(x)=\dfrac{1+x-2x^2}{x+1}$.

1. Область определения функции $D(f)=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ \infty)$.

2. Так как область определения – несимметричное множество, то функция определенной четности не имеет.

3. График пересекает ось ординат в точке $f(0) = 1$. Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс решим уравнение $f(x) = 0$ или $\frac{1+x-2x^2}{x+1} = 0$, корни которого $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

4. Отметим точки $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ и $x = -1$ (в которой дробь не имеет смысла) на координатной оси и отметим знаки функции $f(x)$. Видно, что значения $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ и значения $f(x) < 0$ при $x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$ – промежутки знакопостоянства функции.

5, 6. Найдем производную функции:

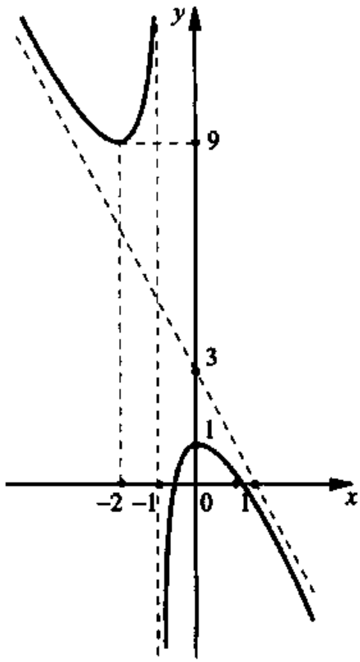
$$f'(x) = \frac{(1+x-2x^2)'(x+1)-(1+x-2x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(1-4x)(x+1)-(1+x-2x^2)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$= -\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$. Производная не существует в точке $x = -1$, но эта точка не входит в область определения функции и не является критической.

Производная обращается в нуль в точках $x = -2$ и $x = 0$ (стационарные точки). Отметим эти точки на числовой оси и расставим знаки производной. Видно, что функция $f(x)$ убывает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; \infty)$ и возрастает на промежутках $[-2; -1)$ и $(-1; 0]$. В точке $x = -2$ функция имеет минимум и $f_{\min} = f(-2) = 9$, в точке $x = 0$ имеет максимум и $f_{\max} = f(0) = 1$.

7. Функция имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, так как при $x \to -1$ числитель дроби $1+x-2x^2 \to -2$, а знаменатель $x + 1 \to 0$. Поэтому $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to -1$.

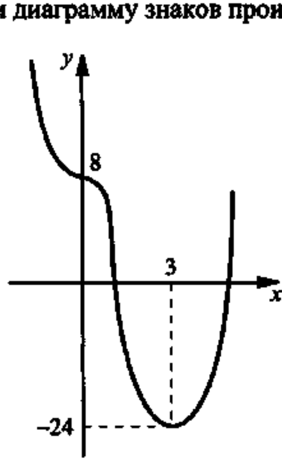
В функции $f(x)$ выделим целую часть (деля уголком) и получим: $f(x) = -2x+3-\frac{2}{x+1}$. При $x \to \pm\infty$ величина $\frac{2}{x+1} \to 0$ и $f(x) \to -2x+3$. Поэтому функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = -2x+3$. Учитывая проведенное исследование, строим график данной функции.



Пример 3

Определим число корней уравнения $x^4 - 4x^3 + 8 = 0$.

Рассмотрим и исследуем функцию $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8$. Найдем производную этой функции: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Приравняем производную нулю и найдем стационарные точки функции $x = 0$ и $x = 3$. Нарисуем диаграмму знаков производной.

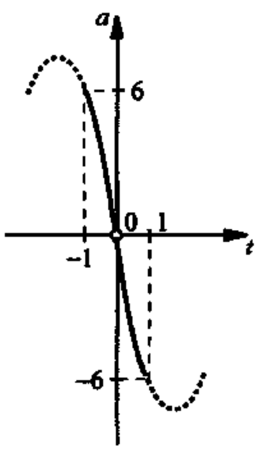


Видно, что на промежутке [3; ∞) функция возрастает. В точке $x = 3$ функция имеет минимум $f_{min}(x) = f(3) = -19$. Тогда по теореме о корне уравнение имеет один корень на промежутке (∞; 3) и один корень на промежутке (3; ∞). Таким образом, данное уравнение имеет два корня (на рисунке приведен график).

Пример 4

Найдем все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2x + \dfrac{a}{\sin x} = -7$ имеет решения.

Используем формулу понижения степени, запишем уравнение в виде $1 - 2\sin^2 x + \dfrac{a}{\sin x} = -7$ и выразим $a = 2\sin^3 x - 8\sin x$. Введем новую переменную t (где $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$) и построим график функции $a(t)$. Приравняем производную $a' = 6t^2 - 8$ нулю и получим стационарные точки $t = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Отметим эти точки на числовой оси и расставим знаки производной. Стационарные точки функции не принадлежат промежуткам $[-1; 0) \cup (0; 1]$. Поэтому на этих промежутках функция убывает. Учтем, что функция $a(t)$ нечетная. Найдем значения $a(-1) = 6$ и $a(1) = -6$. На рассматриваемых промежутках построим график функции.



На графике видно, что при $a \in [-6; 0) \cup (0; 6]$ данное уравнение имеет решения.

IV. Задание на уроке

§ 31, № 1 (а); 2 (б); 5 (а, б); 6 (в, г); 7 (а); 8 (в, г); 9 (а); 10 (б); 11 (а); 12 (б); 13; 15.

V. Задание на дом

§ 31, № 1 (б); 2 (а); 5 (в, г); 6 (а, б); 7 (в); 8 (а, б); 9 (в); 10 (а); 11 (б); 12 (а); 14.

VI. Подведение итогов урока

Уроки 75–76. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин

Цель: рассмотреть наибольшее и наименьшее значения функции.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Исследуйте функцию $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ и постройте ее график.

2. Сколько корней имеет уравнение $2x^4-4x^3-3=0$?

Вариант 2

1. Исследуйте функцию $f(x)=\cos^2 x+\cos x$ и постройте ее график.

2. Сколько корней имеет уравнение $3x^4-4x^3-5=0$?

III. Изучение нового материала

На прошлом занятии мы научились находить экстремумы – минимумы и максимумы функции. На этом занятии надо рассмотреть применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин.

1. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

Во многих математических моделях, описывающих реальные ситуации, исследуется поведение функции на заданном отрезке. В частности, нередко возникает задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда справедливы следующие теоремы (о которых интуитивно мы уже догадывались):

Теорема 1. Функция достигает на отрезке и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.

Теорема 2. Наибольшего и наименьшего значений функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри его.

Теорема 3. Если наибольшее (или наименьшее) значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Учитывая эти теоремы, можно предложить *алгоритм* нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1. Найти производную $f'(x)$ функции.

2. Найти стационарные и критические точки, расположенные внутри отрезка $[a; b]$.

3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в стационарных и критических точках, а также на концах отрезка $[a; b]$.

4. Выбрать из этих значений наименьшее $y_{наим}$ и наибольшее $y_{наиб}$.

Пример 1

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$ на отрезке $[-2; 4]$.

Вычислим производную данной функции: $f'(x) = 36x + 24x^2 - 12x^3 =$ $= 12x(3 + 2x - x^2)$. Приравняем производную нулю, получим уравнение $x(3 + 2x - x^2) = 0$ и найдем стационарные точки функции $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 3$. Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной $f'(x)$. Видно, что в точках $x = -1$ и $x = 3$ функция имеет максимум, в точке $x = 0$ функция имеет минимум. На промежутке $[-2; 4]$ находятся все три точки экстремума.

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка. Эти величины приведены в таблице.

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$	-40	7	0	135	32

Из сравнения значений функции видно, что $y_{наиб} = f(3) = 135$ и $y_{наим} = f(-2) = -40$. В данном случае наибольшее значение функции достигается в точке максимума $x = 3$, наименьшее значение – на левой границе $x = -2$ рассматриваемого промежутка.

Пример 2

Найдем множество значений функции $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Вычислим производную данной функции: $f'(x) = \frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2 + \cos x =$ $= -\sin 2x + \cos x = \cos x(-2\sin x + 1)$. Приравняем производную нулю. Получим уравнение $\cos x(-2\sin x + 1) = 0$. Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения $\cos x = 0$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Их решения на данном отрезке: $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$. Определим знак производной $f'(x)$, например, при $x = 0$. Получим: $f'(0) = \cos 0\cdot(-2\sin 0 + 1) = 1 > 0$. Теперь легко построить диаграмму знаков производной. Видно, что в точках $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$ функция $f(x)$ имеет максимум, в точке $x = \frac{\pi}{2}$ – минимум. Вычислим значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах отрезка. Эти величины приведены в таблице.

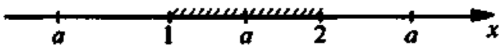
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

Из сравнения значений функции видно, что множество значений функции на данном промежутке $\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{3}{4}$. Видно, что наименьшее значение достигается в точке минимума и на концах данного отрезка, наибольшее значение – в точках максимума, т. е. $y_{наим} = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = \frac{1}{2}$ и $y_{наиб} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Пример 3

Найдем наибольшее значение функции $f(x)=3+2ax-x^2$ на отрезке $[1; 2]$.

Вычислим производную функции: $f'(x)=2a-2x$. Стационарная точка функции $x = a$. Рассмотрим различное расположение точки a по отношению к данному промежутку $[1; 2]$. Имеем три случая.



а) Если $a \in (-\infty; 1)$, то производная $f'(x) < 0$ на отрезке $[1; 2]$. Поэтому функция $f(x)$ убывает и достигает наибольшего значения на левой границе промежутка $x = 1$. Наибольшее значение функции $y_{наиб} = f(1) = 2+2a$.

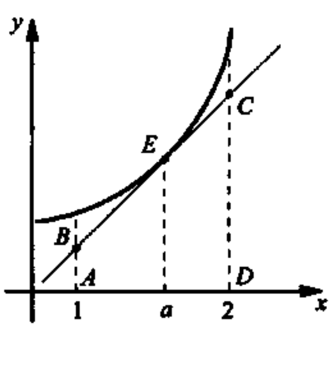
б) Если $a \in [1; 2]$, то стационарная точка находится на данном отрезке и это точка максимума. Тогда наибольшее значение $y_{наиб} = f(a) = 3+a^2$.

в) Если $a \in (2; \infty)$, то производная $f'(x) > 0$ на отрезке $[1; 2]$. Поэтому функция возрастает и достигает наибольшего значения на правой границе промежутка $x = 2$. При этом наибольшее значение функции $y_{наиб} = f(2) = 4a-1$.

Итак, при $a \in (-\infty; 1)$ $y_{наиб} = 2 + 2a$; при $a \in [1; 2]$ $y_{наиб} = 3 + a^2$; при $a \in (2; \infty)$ $y_{наим} = 4a - 1$.

Пример 4

Криволинейная трапеция ограничена кривой $f(x)=x^2+1$, где $x \in [1; 2]$, и отрезками прямых $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. В какой точке данной кривой надо провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?



Предположим, что касательная к графику функции $f(x)$ проведена в точке с абсциссой a. Уравнение этой касательной $y = 2a(x-a)+a^2+1$ или $y = 2ax+1-a^2$. Найдем площадь трапеции $ABCD$. Основание $AB = y(1) = 2a+1-a^2$, основание $CD = y(2) = 4a+1-a^2$, высота $AD = 1$. Площадь трапеции $S = \frac{AB+CD}{2}\cdot AD = -a^2+3a+1$.

Найдем производную этой функции: $S'(a) = -2a+3$. Стационарная точка функции $a = \frac{3}{2}$ принадлежит промежутку [1; 2]. В этой точке функция достигает максимума: $S\left(\frac{3}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$. Найдем также значения функции $S(a)$ на концах промежутка: $S(1) = 3$ и $S(2) = 3$. Видно, что $S_{\text{наиб}} = S\left(\frac{3}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$. Таким образом, касательную надо проводить через точку $E\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

Обсудим теперь нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на промежутке X. В этом случае полезна следующая теорема.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри его единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если $x = x_0$ – точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ – точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$.

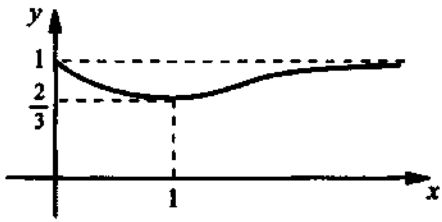
Пример 5

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ на луче $[0; +\infty)$.

Найдем производную функции: $f'(x) = \frac{2x(x^2+x+1)-(x^2+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$ $= \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$. Производная существует при всех значениях x, и функция критических точек не имеет. Стационарные точки находим из условия $f'(x) = 0$ и получим $x = \pm 1$. На рассматриваемом промежутке находится единственная стационарная точка $x = 1$. При $x < 1$

$f'(x) < 0$, при $x > 1$ $f'(x) > 0$. Следовательно, $x = 1$ – точка минимума и $y_{\min} = \dfrac{1+1}{1+1+1} = \dfrac{2}{3}$.

Так как $x = 1$ – единственная стационарная точка на промежутке $[0; +\infty)$, то по теореме 4 $y_{\text{наим}} = y_{\min} = \dfrac{2}{3}$. При $x = 0$ (на конце промежутка) $y(0) = \dfrac{1}{1} = 1$. График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. Тогда $y_{\text{наиб}} = y(0) = 1$. Для наглядности приведен график этой функции.



2. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений величин

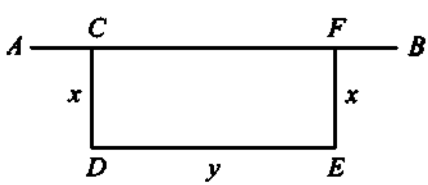
На практике часто встречаются *задачи на оптимизацию* (наименьшие затраты на производство, наименьшее время движения, наибольшая прибыль при сбыте продукции и т. д.).

Рассмотрим типичную задачу из этого раздела, а потом сформулируем алгоритм решения подобных задач.

Пример 6

Участок расположен на границе дачного поселка, с одной стороны уже огражден и должен иметь прямоугольную форму. Как оградить участок с остальных трех сторон, чтобы его площадь была наибольшей, а длина забора составляла a м?

Видно, что имеем типичную задачу на оптимизацию – при фиксированных затратах (длина забора) надо получить максимальную прибыль (площадь участка).



Пусть AB – общий забор дачного поселка, $CDEF$ – участок. Необходимо оградить стороны CD, DE, EF. Обозначим длину сторон CD и EF буквой x, длину стороны DE – y. Тогда площадь участка $S = CD \cdot DE = xy$. Необходимо, чтобы величина $S = xy$ была наибольшей. Но S зависит от двух переменных x и y. Поэтому надо найти связь между этими переменными. Для этого используем условие задачи – длина забора равна a, т. е. $CD + DE + EF = a$ или $x + y + x = a$, откуда $y = a - 2x$.

Тогда $S = xy = x(a-2x) = -2x^2 + ax$. Необходимо, чтобы эта величина была наибольшей. Вообще-то, функция $S(x)$ является квадратичной, и для ее исследования производная не нужна. Тем не менее, чтобы не нарушать общности подхода, мы ее используем.

Найдем производную функции $S(x) = -2x^2 + ax$ и получим: $S'(x) = -4x + a$. Функция имеет единственную стационарную точку $x_0 = \dfrac{a}{4}$. Легко показать, что это точка максимума. Действительно, $S'(0) = a > 0$, $S'(a) = -3a < 0$, т. е. производная меняет знак с плюса на минус. Найдем значение переменной: $y_0 = a - 2x_0 = a - 2\cdot\dfrac{a}{4} = \dfrac{a}{2}$.

Видим, что $y_0 = 2x_0$. Поэтому участок надо ограждать так, чтобы одна его сторона была вдвое больше другой. При этом наибольшая площадь $S_{наиб} = S\left(\dfrac{a}{4}\right) = -2\cdot\left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + a\cdot\dfrac{a}{4} = \dfrac{a^2}{8}$.

Таким образом, были получены ответы на все возникшие вопросы.

Теперь сформулируем *алгоритм* оптимизации:

1. Выбрать оптимизируемую величину (S) и переменные (x, y), через которые она выражается.

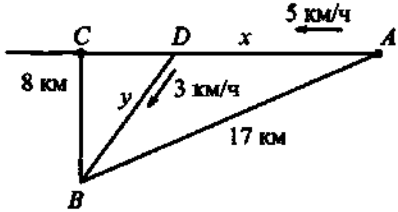
2. Найти связь между переменными x и y, используя условия задачи.

3. Получить зависимость оптимизируемой величины S от одной переменной, x, т. е. функцию $S(x)$.

4. Провести исследование функции $S(x)$ на наибольшее или наименьшее значения.

Пример 7

Турист идет из пункта A, находящегося на шоссе, в пункт B, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от A до B по прямой равно 17 км. На каком расстоянии от A туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт B, если его скорость по шоссе равна 5 км/м, а по бездорожью – 3 км/ч?



Пусть AC – шоссе, тогда $BC = 8$ и $AB = 17$. Пусть турист свернул в точке D. Обозначим расстояния $AB = x$ и $DB = y$. Время движения туриста $t=\dfrac{AD}{5}+\dfrac{DB}{3}=\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}$.

Найдем связь между переменными x и y. Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора найдем: $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=$ $=\sqrt{17^2-8^2}=15$. Из прямоугольного треугольника BCD получим: $CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=\sqrt{y^2-8^2}=\sqrt{y^2-64}$. Очевидно, что $AD + DC = AC$ или $x+\sqrt{y^2+64}=15$. Проще всего из этого равенства выразить $x=15-\sqrt{y^2-64}$.

Запишем время движения туриста: $y=\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{15-\sqrt{y^2-64}}{5}+\dfrac{y}{3}=$ $=\dfrac{y}{3}-\dfrac{\sqrt{y^2-64}}{5}+3$. Получили зависимость оптимизируемой величины t от переменной y, т. е. функцию $t(y)$.

Найдем производную функции $t(y)=\dfrac{y}{3}-\dfrac{\sqrt{y^2-64}}{5}+3$ и получим: $t'(y)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2y}{5\cdot 2\cdot\sqrt{y^2-64}}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{y}{5\sqrt{y^2-64}}$. На рисунке видно, что $8\le y\le 17$. Поэтому критическая точка функции $t(y)$ равна 8 (производная не существует). При этом $t(8)=\dfrac{8}{3}+3=5\dfrac{2}{3}$ (ч).

Стационарная точка определяется условием $t'(y) = 0$, т. е. $\frac{1}{3}-\frac{y}{5\sqrt{y^2-64}}=0$ или $5\sqrt{y^2-64}=3y$. Возведем в квадрат обе части этого иррационального уравнения: $25y^2-1600=9y^2$, откуда $y^2=100$ и $y = 10$. Можно проверить, что это точка минимума и $t(10)=\frac{10}{3}-\frac{\sqrt{100-64}}{5}+3=\frac{10}{3}-\frac{6}{5}+3=5\frac{2}{15}$ (ч).

Найдем также значение функции на границе промежутка: $t(17)=\frac{17}{3}-\frac{\sqrt{289-64}}{5}+3=\frac{17}{3}-\frac{15}{3}+3=5\frac{2}{3}$ (ч). Сравнивая значения функции в точке минимума $t(10)=5\frac{2}{15}$ и на концах промежутка $t(8)=t(17)=5\frac{2}{3}$, получим наименьшее значение функции $t_{наим}=t(10)=5\frac{2}{15}$.

Найдем переменную: $x=15-\sqrt{y^2-64}=15-\sqrt{10^2-64}=15-6=9$. Таким образом, сворачивать с шоссе надо в 9 км от пункта A.

IV. Контрольные вопросы

1. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке.

2. Алгоритм оптимизации функции.

V. Задание на уроках

§ 32, № 1 (а, б); 2 (в, г); 8; 13 (а, б); 15 (в, г); 16 (а); 17 (б); 18 (а); 23; 25; 26; 30; 32; 37 (а); 38 (б).

VI. Задание на дом

§ 32, № 1 (в, г); 2 (а, б); 9; 13 (в, г); 15 (а, б); 16 (б); 17 (а); 18 (б); 24; 27; 28; 31; 33; 37 (б); 38 (а).

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 77–78. Контрольная работа по теме «Производная»

Цель: проверить знания учащихся с использованием разноуровневых вариантов.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика контрольной работы

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Найдите стационарные точки функции $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.

3. Докажите, что функция $f(x) = 4x - 3\sin x$ возрастает на всей числовой прямой.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ на отрезке $[-2; 4]$.

5. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 + 4x^2 - 5$ и постройте ее график.

6. Число 180 разбейте на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

Вариант 2

1. Найдите стационарные точки функции $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 2$.

3. Докажите, что функция $f(x) = 5\cos x - 7x$ убывает на всей числовой прямой.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ на отрезке $[-2; 6]$.

5. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 + 8x^2 - 9$ и постройте ее график.

6. Число 300 разбейте на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 2 : 3, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

Вариант 3

1. Найдите стационарные точки функции $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+2x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

3. Докажите, что уравнение $x^5+2x^3+8x+\cos 3x=0$ имеет ровно один корень.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-2)^2(x+4)$ на отрезке $[-5;\ 1]$.

5. Найдите наименьшее значение суммы трех сторон прямоугольника, если его площадь равна S.

6. При каком наибольшем значении параметра a функция $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-ax^2+ax+7$ возрастает на всей числовой прямой?

Вариант 4

1. Найдите стационарные точки функции $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x+2x$.

2. Определите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x^2}}$.

3. Докажите, что уравнение $x^5+4x^3+7x+\sin 2x=0$ имеет ровно один корень.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-4)^2(x+2)$ на отрезке $[-1;\ 5]$.

5. Найдите наименьшее значение суммы трех сторон параллелограмма с острым углом α и площадью S.

6. При каком наибольшем значении параметра a функция $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3-ax^2-3ax+2$ убывает на всей числовой прямой?

Вариант 5

1. Докажите, что для функции $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x$ выполняется неравенство $y_{\text{наиб}}<\dfrac{4}{5}$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$:

а) постройте график функции $f(x)$;

б) сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$?

3. Решите уравнение $x^3-3x^2+9x-2=\sqrt{27-2x}$.

4. Число 20 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

5. При каком c касательная к графику функции $f(x)=cx^2$ образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$ и отсекает от четвертой четверти треугольник площадью $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?

Вариант 6

1. Докажите, что для функции $f(x)=(\cos x)^2\sin x$ выполняется неравенство $y_{наим}>-\frac{7}{18}$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

2. Дана функция $f(x)=\frac{x^3+4}{(x+1)^3}$:

   а) постройте график функции $f(x)$;

   б) сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$?

3. Решите уравнение $x^3-2x^2+8x-3=\sqrt{19-3x}$.

4. Число 48 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

5. При каком c касательная к графику функции $f(x)=cx^2$ образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{6}$ и отсекает от четвертой четверти треугольник площадью $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Урок 79. Итоги контрольной работы

Цели: сообщить результаты работы; рассмотреть типичные ошибки; разобрать трудные задачи.

Ход урока

I. Сообщение темы и целей урока

II. Итоги контрольной работы

III. Ответы и решения

Вариант 1

1. $x = \mathrm{arctg}\,1{,}5 + \pi n$ (где $n \in Z$).

2. Промежутки возрастания $(-\infty;\ -5]$ и $[1;\ \infty)$, промежуток убывания $[-5;\ 1]$, $x_{\max} = -5$ и $f_{\max}(x) = f(-5) = 34\frac{1}{3}$; $x_{\min} = 1$ и $f_{\min}(x) = f(1) = -1\frac{2}{3}$.

3. Доказано.

4. $y_{\text{наиб}} = f(-1) = 15$, $y_{\text{наим}} = f(3) = -17$.

5. $\min f(x) = f(0) = -5$, точки пересечения с осью абсцисс $x = \pm 1$.

6. 40, 80, 60.

Вариант 2

1. $x = -\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n$ (где $n \in Z$).

2. Промежутки возрастания $(-\infty;\ -4]$ и $[1;\ \infty)$, промежуток убывания $[-4;\ 1]$, $x_{\max} = -4$ и $f_{\max}(x) = f(-4) = 20\frac{2}{3}$; $x_{\min} = 1$ и $f_{\min}(x) = f(1) = -\frac{1}{6}$.

3. Доказано.

4. $y_{\text{наиб}} = f(1) = 8$, $y_{\text{наим}} = f(-2) = -73$.

5. $\min f(x) = f(0) = -9$, точки пересечения с осью абсцисс $x = \pm 1$.

6. 80, 120, 100.

Вариант 3

1. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ (где $n \in Z$).

2. Промежуток возрастания $[2;\ \infty)$, промежутки убывания $(-\infty;\ -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2};\ 2]$, $x_{\min} = 2$ и $f_{\min}(x) = f(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Учесть возрастание функции.

4. $y_{\text{наиб}} = f(-2) = 32$, $y_{\text{наим}} = f(-5) = -49$.

5. $\sqrt{2S}$.

6. $a = 2$.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{3}+2\pi n$ (где $n \in Z$).

2. Промежуток возрастания $(-\sqrt{3};\ \sqrt{3})$, экстремумов нет.

3. Учесть возрастание функции.

4. $y_{наиб} = f(0) = 32$, $y_{наим} = f(4) = 0$.

5. $2\sqrt{2S\sin\alpha}$.

6. $a = 6$.

Вариант 5

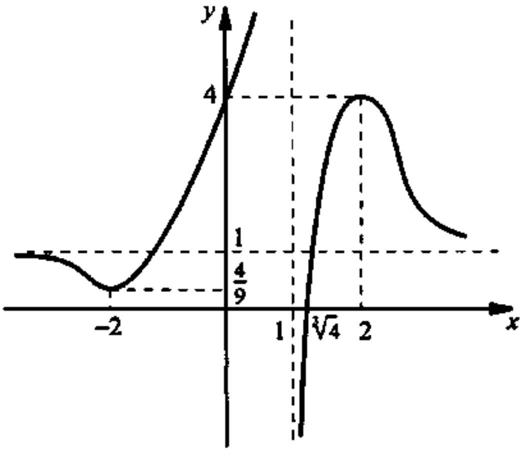
1. Найдем наибольшее значение данной функции. Сначала вычислим производную функции $f'(x) = \cos x \cdot \sin 2x + {}$ $+ \sin x \cdot 2\cos 2x = \sin x(2\cos^2 x + 2\cos 2x) = \sin x(1 + 3\cos 2x)$. Стационарные точки функции на заданном промежутке задаются условиями $\sin x = 0$ и $\cos 2x = -\frac{1}{3}$. Для первого случая ($\sin x = 0$ или $x = 0;\ \pm\pi$) имеем: $f(x) = 0$. Для второго случая ($\cos 2x = -\frac{1}{3}$) получим:

$$f(x) = \sin x \cdot \sin 2x = 2\sin^2 x \cos x = (1 - \cos 2x) \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3} \approx 0{,}76.$$ Так как $0{,}76 < \frac{4}{5}$, то $y_{наиб} < \frac{4}{5}$.

Ответ: доказано.

2, а. График функции пересекает ось абсцисс в точке $x = \sqrt[3]{4}$ и ось ординат – в точке $y = 4$, имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = 1$. Найдем производную функции $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^3 - (x^3-4) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = 3\frac{4-x^2}{(x-1)^4}$. Стационарные точки функции $x = \pm 2$. При этом $x_{min} = -2$ и $y_{min} = f(-2) = \frac{4}{9}$; $x_{max} = 2$ и $y_{max} = f(2) = 4$. Исследовав промежутки возрастания и убывания функции, легко построить график функции.



Ответ: см. график.

2, б. После построения графика функции $f(x)$ легко ответить на вопрос о количестве корней уравнения $f(x) = a$. Имеем при $a \in \left(-\infty; \frac{4}{9}\right) \cup (4; \infty)$ 1 корень; при $a \in \left\{\frac{4}{9}; 1; 4\right\}$ 2 корня; при $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right) \cup (1; 4)$ 3 корня.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; \frac{4}{9}\right) \cup (4; \infty)$ 1 корень; при $a \in \left\{\frac{4}{9}; 1; 4\right\}$ 2 корня; при $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right) \cup (1; 4)$ 3 корня.

3. ОДЗ данного уравнения $x = \frac{27}{2}$. Производная левой части уравнения $f_1'(x) = 3x^2 - 6x + 9$ при всех x положительна. Производная правой части уравнения $f_2'(x) = -\frac{1}{\sqrt{27-2x}}$ отрицательна при $x \in (-\infty; 13{,}5)$. Тогда по теореме о корне данное уравнение имеет единственный корень, который находится подбором. Получаем $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

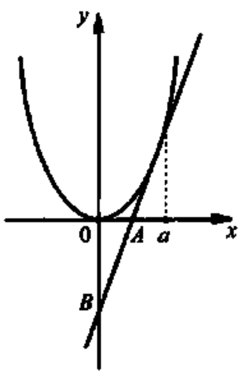
4. Пусть одно из чисел равно x, тогда второе равно $20 - x$. Найдем сумму куба первого числа и квадрата второго числа и получим функцию $f(x) = x^3 + (20-x)^2$. Найдем ее производную: $f'(x) = 3x^2 - 2(20-x) = 3x^2 + 2x - 40$. Стационарные точки функции

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{3} = \frac{-1 \pm 11}{3}$ или $x_1 = -4$ и $x_2 = \frac{10}{3}$. Отметим эти точки на координатной оси и нарисуем диаграмму знаков производной. Видно, что функция имеет минимум при $x = \frac{10}{3}$. Тогда второе число $20 - x = \frac{50}{3}$. Эти два числа положительные, что соответствует условию задачи.

Заметим, что если числа поменять местами, то по аналогии будем иметь функцию $f(x) = (20-x)^3 + x^2$. Производная этой функции $f'(x) = -3(20-x)^2 + 2x = -(3x^2 - 122x + 1200)$. Видно, что функция $f(x)$ убывает при всех x и наименьшего значения не имеет.

Ответ: $\frac{10}{3}$ и $\frac{50}{3}$.

5. Легко сообразить, что $c > 0$. Пусть касание происходит в точке a. Найдем $f'(x) = 2cx$ и напишем уравнение касательной: $y = 2ca(x-a) + ca^2$ или $y = 2cax - ca^2$.



Найдем координаты точек пересечения касательной с осями координат. При $x = 0$ имеем: $y = -ca^2$ и $OB = ca^2$. При $y = 0$ получаем уравнение $0 = 2cax - ca^2$, откуда $x = \frac{a}{2}$ и $OA = \frac{a}{2}$. Тогда $S_{OAB} = \frac{1}{2} OB \cdot OA = \frac{1}{2} ca^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{ca^3}{4}$. Учтем, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, и запишем условия задачи: $\begin{cases} 2ca = \sqrt{3}, \\ \frac{ca^3}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$ Из этой системы уравнений надо найти c. Возведем в куб первое уравнение $\begin{cases} 8c^3a^3 = 3\sqrt{3}, \\ \dfrac{ca^3}{4} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ и разделим

первое уравнение на второе: $c^2 = \dfrac{9}{256}$ и $c = \dfrac{3}{16}$ (учтено, что $c > 0$).

Кстати, легко найти и точку касания: $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2c} = \dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $c = \dfrac{3}{16}$.

Вариант 6

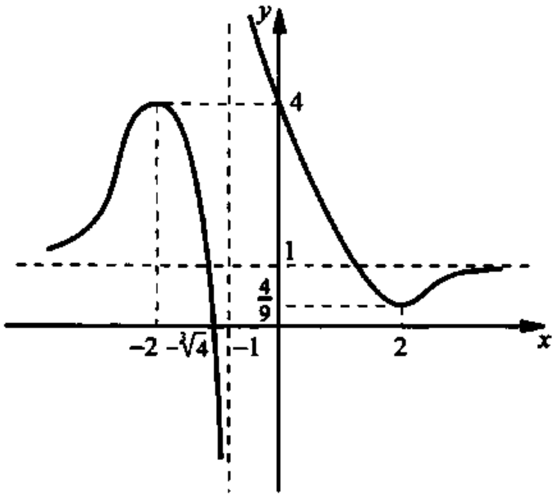
1. Найдем наименьшее значение данной функции. Сначала вычислим производную функции: $f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x)\sin x + (\cos x)^2 \cdot \cos x =$ $= \cos x(-2\sin^2 x + \cos^2 x) = \dfrac{\cos x(3\cos 2x - 1)}{2}$. Стационарные точки функции на заданном промежутке задаются условиями $\cos x = 0$ и $\cos 2x = \dfrac{1}{3}$. Для первого случая ($\cos x = 0$ или $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$) имеем: $f(x) = 0$. Для второго случая ($\cos 2x = \dfrac{1}{3}$) получим: $f(x) = (\cos x)^2 \sin x =$

$$= -\frac{1+\cos 2x}{2}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = -\frac{1+\frac{1}{3}}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0,38.$$

Так как $-0,38 > -\dfrac{7}{18}$, то $y_{наим} < -\dfrac{7}{18}$.

Ответ: доказано.

2, а. График функции пересекает ось абсцисс в точке $x = -\sqrt[3]{4}$ и ось ординат – в точке $y = 4$. Имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и горизонтальную асимптоту $y = 1$. Найдем производную функции: $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+1)^3 - (x+4)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = 3\dfrac{x^2-4}{(x+1)^4}$. Стационарные точки функции $x = \pm 2$. При этом $x_{\min} = 2$ и $y_{\min} = f(2) = \dfrac{4}{9}$; $x_{\max} = -2$ и $y_{\max} = f(-2) = 4$. Исследовав промежутки возрастания и убывания, легко построить график функции.



Ответ: см. график.

2, б. После построения графика функции $f(x)$ легко ответить на вопрос о количестве корней уравнения $f(x) = a$. Имеем при $a \in \left(-\infty; \frac{4}{9}\right) \cup (4; \infty)$ 1 корень; при $a \in \left\{\frac{4}{9}; 1; 4\right\}$ 2 корня; при $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right) \cup (1; 4)$ 3 корня.

Ответ: при $a \in \left(-\infty; \frac{4}{9}\right) \cup (4; \infty)$ 1 корень; при $a \in \left\{\frac{4}{9}; 1; 4\right\}$ 2 корня; при $a \in \left(\frac{4}{9}; 1\right) \cup (1; 4)$ 3 корня.

3. ОДЗ данного уравнения $x \le \frac{19}{2}$. Производная левой части уравнения $f_1'(x) = 3x^2 - 4x + 8$ при всех x положительна. Производная правой части уравнения $f_2'(x) = -\frac{3}{\sqrt{19-3x}}$ отрицательна при $x \in \left(-\infty; \frac{19}{3}\right)$. Тогда по теореме о корне данное уравнение имеет единственный корень, который находится подбором. Получаем $x = 1$.

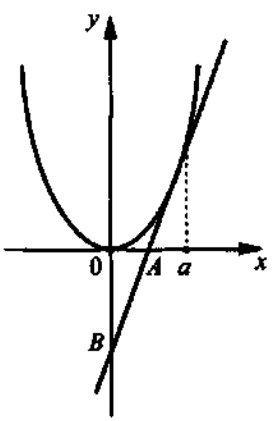
Ответ: $x = 1$.

4. Пусть одно из чисел равно x, тогда второе равно $48 - x$. Найдем сумму куба первого числа и квадрата второго числа и получим функцию $f(x)=x^3+(48-x)^2$. Найдем ее производную: $f'(x)=3x^2-2(48-x)=3x^2+2x-96$. Стационарные точки функции $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+288}}{3}=\frac{-1\pm17}{3}$ или $x_1=-6$ и $x_2=\frac{16}{3}$. Отметим эти точки на координатной оси и нарисуем диаграмму знаков производной. Видно, что функция имеет минимум при $x=\frac{16}{3}$. Тогда второе число $48-x=\frac{128}{3}$. Эти два числа положительные, что соответствует условию задачи.

Заметим, что если числа поменять местами, то по аналогии будем иметь функцию $f(x)=(48-x)^3+x^2$. Производная этой функции $f'(x)=-3(48-x)^2+2x=-(3x^2-300x+6912)$. Видно, что функция $f(x)$ убывает при всех x и наименьшего значения не имеет.

Ответ: $\frac{16}{3}$ и $\frac{128}{3}$.

5. Легко сообразить, что $c > 0$. Пусть касание происходит в точке a. Найдем $f'(x) = 2cx$ и напишем уравнение касательной: $y=2ca(x-a)+ca^2$ или $y=2cax-ca^2$.



Найдем координаты точек пересечения касательной с осями координат. При $x = 0$ имеем: $y = -ca^2$ и $OB = ca^2$. При $y = 0$ получаем уравнение $0=2cax-ca^2$, откуда $x=\frac{a}{2}$ и $OA=\frac{a}{2}$. Тогда

$S_{OAB}=\frac{1}{2}OB\cdot OA=\frac{1}{2}ca^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{ca^3}{4}$. Учтем, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, и запишем условия задачи: $\begin{cases}2ca=\frac{1}{\sqrt{3}},\\ \frac{ca^3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$ Из этой системы уравнений надо найти c.

Возведем в куб первое уравнение: $\begin{cases}8c^3a^3=\frac{1}{3\sqrt{3}},\\ \frac{ca^3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ и разделим первое уравнение на второе: $32c^2=\frac{2}{9}$. Тогда $c^2=\frac{1}{144}$ и $c=\frac{1}{12}$ (учтено, что $c>0$). Кстати, легко найти и точку касания: $a=\frac{1}{2c\sqrt{3}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{6}}=$

$=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

Ответ: $c=\frac{1}{12}$.

Уроки 80–81. Зачетная работа по теме «Производная»

Цель: проверить знания учащихся по вариантам одинаковой сложности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Характеристика зачетной работы

Так как эта работа является зачетной, то в нее не включены принципиально новые задачи. Поэтому разбору заданий работы отдельного урока можно и не посвящать (решения задач могут быть вывешены на стенде). Для стендового размещения разбор вариантов приводится.

III. Варианты зачетной работы

Вариант 1

А

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=3x^7-2\sqrt{x}+5$;

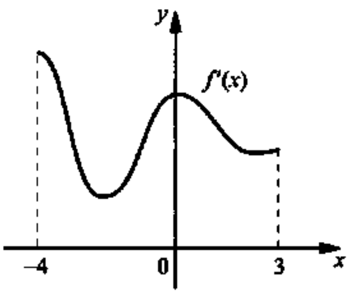
б) $f(x)=5\sin x-2\cos x+3\operatorname{tg} x$.

2. Решите неравенство $f'(x)=g'(x)$, если $f(x)=x^3+x-\sqrt{5}$ и $g(x)=3x^2+x+\sqrt{7}$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2+2x-8$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

4. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x^2+2$ и постройте ее график.

5. На рисунке приведена зависимость производной функции $f'(x)$ на отрезке [–4; 3]. В каких точках функция $f(x)$ имеет наибольшее и наименьшее значения?



6. Тело движется по прямой по закону $x(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+4t-2$. Найдите наименьшую и наибольшую скорости тела при $t\in[1;\,4]$.

В

7. Найдите производную функции $f(x)=\sin\sqrt{x^2+1}$.

8. Найдите уравнения общей касательной к параболам $f_1(x)=x^2-5x+6$ и $f_2(x)=x^2+x+1$.

9. При каких значениях параметра a функция $f(x)=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$ возрастает на всей числовой оси и не имеет стационарных точек?

10. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого от координатных осей касательной к кривой $f(x)=2\sqrt{x-4}-\frac{8}{3}$, проведенной параллельно прямой $y=5+\frac{1}{3}x$.

C

11. Проведите исследование и постройте график функции $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{x+1}$.

12. При каких значениях a функция $f(x)=8ac-a\sin 6x-$ $-7x-\sin 5x$ возрастает на всей числовой оси и не имеет стационарных точек?

13. Напишите уравнение общей касательной к параболам $f_1(x)=x^2+x-2$ и $f_2(x)=-x^2+7x-11$.

Вариант 2

А

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=5x^6-2\sqrt[3]{x}+4$;

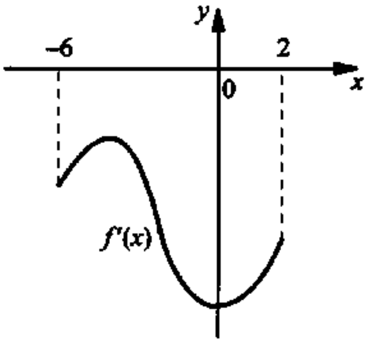
б) $f(x)=6\sin x-4\cos x-2\operatorname{tg} x$.

2. Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=2x^3-x^2-\sqrt{3}$ и $g(x)=x^3+\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{11}$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2-2x-3$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

4. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-3x+2$ и постройте ее график.

5. На рисунке приведена зависимость производной функции $f'(x)$ на отрезке [−6; 2]. В каких точках функция $f(x)$ имеет наибольшее и наименьшее значения?



6. Тело движется по прямой по закону $x(t)=-\dfrac{t^3}{3}+3t^2+8t+1$. Найдите наименьшую и наибольшую скорости тела при $t\in[1;\ 4]$.

B

7. Найдите производную функции $f(x)=\cos\sqrt{x^2+1}$.

8. Найдите уравнения общей касательной к параболам $f_1(x)=x^2+x-2$ и $f_2(x)=-x^2+7x-11$.

9. При каких значениях параметра a функция $f(x)=a\sin 7x+$ $+8ax+\sin 4x-5x$ убывает на всей числовой оси и не имеет стационарных точек?

10. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого от координатных осей касательной к кривой $f(x)=2\sqrt{x-3}-\dfrac{5}{2}$, проведенной параллельно прямой $y=7+\dfrac{1}{2}x$.

C

11. Проведите исследование и постройте график функции $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x-3}$.

12. При каких значениях a функция $f(x)=4ax-a\sin 2x-10x-\sin 6x$ возрастает на всей числовой оси и не имеет стационарных точек?

13. Напишите уравнение общей касательной к параболам $f_1(x)=x^2+x-1$ и $f_2(x)=-x^2+5x-5$.

IV. Ответы и решения

Вариант 1

1. а) $21x^6-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; б) $5\cos x+2\sin x+\dfrac{3}{\cos^2 x}$.

2. $x\in(-\infty;\,0)\cup(2;\,+\infty)$.

3. $y=8x-17$.

4. График построен.

5. $y_{\text{наим}}=f(-4)$, $y_{\text{наиб}}=f(3)$.

6. $v_{\text{наим}}=v(2)=0$, $v_{\text{наиб}}=v(4)=4$.

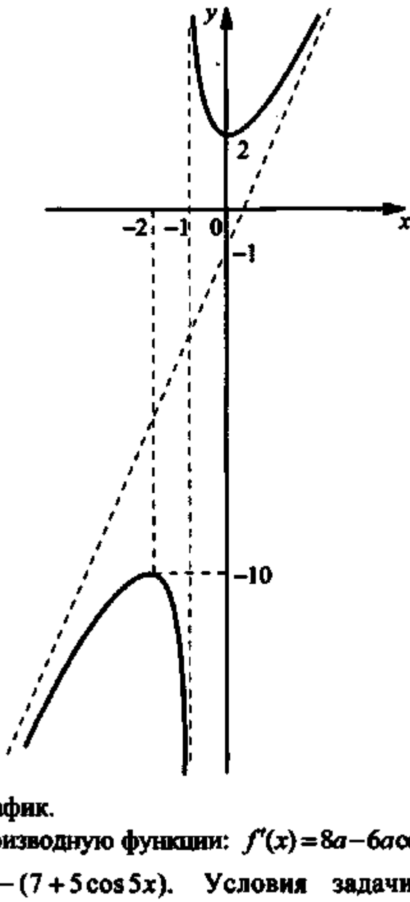
7. $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cos\sqrt{x^2+1}$.

8. $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{9}$.

9. $a>6$.

10. $\dfrac{3}{2}$.

11. График данной функции пересекает ось ординат в точке $y = 2$ и не пересекает ось абсцисс. Функция имеет наклонную асимптоту $y = 3x - 1$. Найдем производную функции: $f'(x) = \frac{(6x+2)(x+1)-(3x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \frac{3x(x+2)}{(x+1)^2}$. Функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; \infty)$ и убывает на промежутках $[-2; -1)$ и $(-1; 0]$. Поэтому при $x = -2$ функция имеет максимум $f(-2) = -10$ и при $x = 0$ – минимум $f(0) = 2$. Теперь легко построить график функции.



Ответ: см. график.

12. Найдем производную функции: $f'(x) = 8a - 6a\cos 6x - 7 - 5\cos 5x = a(8 - 6\cos 6x) - (7 + 5\cos 5x)$. Условия задачи выполняются, если $f'(x) > 0$ при всех x. Получим неравенство $a(8 - 6\cos 6x) - (7 + 5\cos 5x) > 0$. Так как $8 - 6\cos 6x > 0$, то параметр a должен

удовлетворять неравенству $a > \dfrac{7+5\cos 5x}{8-6\cos 6x}$ при всех x. Очевидно, что дробь справа принимает наибольшее значение, если ее числитель наибольший, а знаменатель наименьший. Это достигается, если $\cos 5x = 1$ и $\cos 6x = 1$ (выполняется, например, при $x = 2\pi n$). Тогда $\dfrac{7+5\cos 5x}{8-6\cos 6x} = \dfrac{7+5}{8-6} = \dfrac{12}{2} = 6$. Поэтому получим: $a > 6$.

Ответ: $a > 6$.

13. Пусть касание с параболой $f_1(x) = x^2 + x - 2$ происходит в точке a_1. Найдем производную: $f_1'(x) = 2x + 1$ – и напишем уравнение касательной: $y_1 = (2a_1 + 1)(x - a_1) + a_1^2 + a_1 - 2$ или $y_1 = (2a_1 + 1)x - a_1^2 - 2$.

Касание с параболой $f_2(x) = -x^2 + 7x - 11$ происходит в точке a_2. Найдем производную: $f_2'(x) = -2x + 7$ – и напишем уравнение касательной: $y_2 = (-2a_2 + 7)(x - a_2) - a_2^2 + 7a_2 - 11$ или $y_2 = (-2a_2 + 7)x + a_2^2 - 11$.

Так как прямые y_1 и y_2 – одна и та же касательная, то у этих прямых должны совпадать угловые коэффициенты и свободные члены. Получаем систему уравнений $\begin{cases} 2a_1 + 1 = -2a_2 + 7, \\ -a_1^2 - 2 = a_2^2 - 11 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 3, \\ a_1^2 + a_2^2 = 9. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $a_2 = 3 - a_1$ и подставим во второе уравнение: $a_1^2 + (3 - a_1)^2 = 9$ или $a_1^2 - 3a_1 = 0$, откуда $a_1 = 0$ и $a_1 = 3$. Подставив эти значения в уравнение касательной y_1, получим: $y = x - 2$ и $y = 7x - 11$. Итак, существуют две общие касательные.

Ответ: $y = x - 2$ и $y = 7x - 11$.

Вариант 2

1. а) $30x^5 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$; б) $6\cos x + 4\sin x - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

2. $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

3. $y = 2x - 7$.

4. График построен.

5. $y_{\text{наиб}} = f(-6)$, $y_{\text{наим}} = f(2)$.

6. $v_{\text{наим}} = v(1) = 13$, $v_{\text{наиб}} = v(3) = 17$.

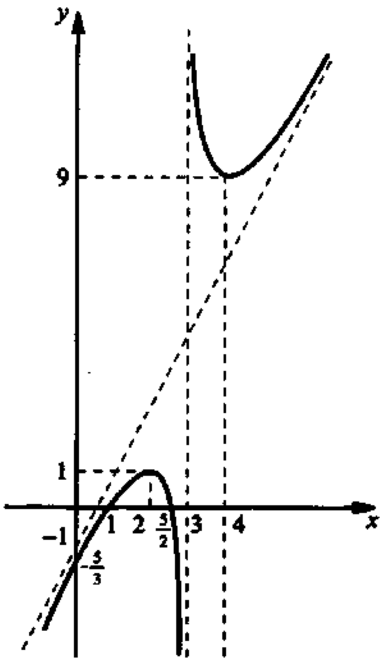
7. $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sin\sqrt{x^2+1}$.

8. $y = x - 2$, $y = 7x - 11$.

9. $a < \dfrac{1}{15}$.

10. 4.

11. График данной функции пересекает ось ординат в точке $y = -\dfrac{5}{3}$ и ось абсцисс – в точках $x = 1$ и $x = \dfrac{5}{2}$. Функция имеет вертикальную асимптоту $x = 3$ и наклонную асимптоту $y = 2x - 1$. Найдем производную функции: $f'(x) = \dfrac{(4x-7)(x-3)-(2x^2-7x+5)}{(x-3)^2} = \dfrac{2(x^2-6x+8)}{(x-3)^2}$. Функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 2]$ и $[4; \infty)$ и убывает на промежутках $[2; 3)$ и $(3; 4]$. Поэтому при $x = 2$ функция имеет максимум $f(2) = 1$ и при $x = 4$ – минимум $f(4) = 9$. Теперь легко построить график функции.



Ответ: см. график.

12. Найдем производную функции: $f'(x)=4a-2a\cos 2x-10-6\cos 6x=$ $=a(4-2\cos 2x)-(10+6\cos 6x)$. Условия задачи выполняются, если $f'(x)>0$ при всех x. Получим неравенство $a(4-2\cos 2x)-(10+6\cos 6x)>0$. Так как $4-2\cos 2x>0$, то параметр a должен удовлетворять неравенству $a>\dfrac{5+3\cos 6x}{2-\cos 2x}$ при всех x. Очевидно, что дробь справа принимает наибольшее значение, если ее числитель наибольший, а знаменатель наименьший. Это достигается, если $\cos 6x=1$ и $\cos 2x=1$ (выполняется, например, при $x=\kappa n$). Тогда $\dfrac{5+3\cos 6x}{2-\cos 2x}=$ $=\dfrac{5+3}{2-1}=\dfrac{8}{1}=8$. Поэтому получим $a>8$.

Ответ: $a>8$.

13. Пусть касание с параболой $f_1(x)=x^2+x-1$ происходит в точке a_1. Найдем производную: $f_1'(x)=2x+1$ – и напишем уравнение касательной: $y_1=(2a_1+1)(x-a_1)+a_1^2+a_1-1$ или $y_1=(2a_1+1)x-a_1^2-1$.

Касание с параболой $f_2(x)=-x^2+5x-5$ происходит в точке a_2. Найдем производную: $f_2'(x)=-2x+5$ – и напишем уравнение касательной: $y_2=(-2a_2+5)(x-a_2)-a_2^2+5a_2-5$ или $y_2=(-2a_2+5)x+a_2^2-5$.

Так как прямые y_1 и y_2 – одна и та же касательная, то у этих прямых должны совпадать угловые коэффициенты и свободные члены. Получим систему уравнений $\begin{cases}2a_1+1=-2a_2+5,\\-a_1^2-1=a_2^2-5\end{cases}$ или

$$\begin{cases}a_1+a_2=2,\\a_1^2+a_2^2=4.\end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $a_2=2-a_1$ и подставим во второе уравнение: $a_1^2+(2-a_1)^2=4$ или $a_1^2-2a_1=0$, откуда $a_1=0$ и $a_1=2$. Подставив эти значения в уравнение касательной y_1, получим $y=x-1$ и $y=5x-5$. Итак, существуют две общие касательные.

Ответ: $y=x-1$ и $y=5x-5$.

Уроки 82–83. Итоговая контрольная работа

Цель: провести итоговую аттестацию учащихся по базовым темам курса.

Ход уроков

I. Характеристика контрольной работы

Работа составлена в двух вариантах. Все задачи имеют примерно одинаковую сложность и контролируют основные навыки:

1) умение использовать основные формулы для преобразования тригонометрических выражений и вычисления их значений;

2) представление об обратных тригонометрических функциях, выполнение простейших преобразований и вычислений с такими функциями;

3) умение строить графики прямых и обратных тригонометрических функций;

4) умение решать тригонометрические уравнения, системы уравнений, неравенства;

5) знание понятия и свойств производной функции, умение вычислять производные;

6) использование производной для исследования функции и построения ее графика, умение анализировать уравнения;

7) знание геометрического и физического смысла производной;

8) умение применять производную для решения математических, физических и прикладных задач.

II. Оценка результатов работы

Оценка «5» ставится за любые пять правильно решенных задач, оценка «4» – за четыре задачи, оценка «3» – за три задачи. У учащихся имеется некоторая свобода выбора за счет шестой задачи.

III. Варианты контрольной работы

Вариант 1

1. Постройте график уравнения $\sin(y-x)=\sin x$.

2. Решите уравнение $6\sin^2 x-5\cos x-5=0$.

3. Решите неравенство $\sin 2x>\sqrt{3}\cos 2x$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $2\operatorname{tg}^2 x+8\operatorname{tg} x+$ $+\sin^2 y-6\sin y$.

5. Определите угол между двумя касательными, проведенными из точки (0; −2) к параболе $f(x)=x^2$.

6. Число 450 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых относятся как 2 : 3, а произведение всех трех имеет наибольшее значение.

Вариант 2

1. Постройте график уравнения $\cos(y-x)=\cos x$.

2. Решите уравнение $7\cos^2 x-13\sin x-13=0$.

3. Решите неравенство $\cos 3x>\sqrt{3}\sin 3x$.

4. Найдите наименьшее значение выражения $4\operatorname{ctg}^2 x+16\operatorname{ctg} x+$ $+\cos^2 y+4\cos y$.

5. Определите угол между двумя касательными, проведенными из точки (0; 2) к параболе $f(x)=-3x^2$.

6. Число 420 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых относятся как 3 : 4, а произведение всех трех имеет наибольшее значение.

IV. Ответы

Вариант 1

1. Семейства прямых $y=2x+2\pi n$ и $y=\pi+2\pi k$; $n, k\in Z$.

2. $\pi+2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi n$.

3. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$.

4. -13.

5. $\pi-2\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$.

6. 120; 180; 150.

Вариант 2

1. Семейства прямых $y=2x-2\pi n$ и $y=2\pi k$; $n, k\in Z$.

2. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{6}{7}+\pi n$.

3. $\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n;\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}\pi n\right)$.

4. -19.

5. $\pi-2\operatorname{arctg}2\sqrt{6}$.

6. 120; 160; 140.

Урок 84. Подведение итогов обучения

Цель: провести анализ результатов обучения и успехов учащихся.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Основная часть

1. Анализ изучения материала (темы, которые усвоены хорошо, и темы, которые усвоены недостаточно, с указанием причин – непонимание, отсутствие базовых знаний, незнание основных формул, арифметические ошибки и т. д.).
2. Личные успехи и недочеты каждого учащегося, рекомендации по улучшению успеваемости.
3. Краткая характеристика следующего учебного года (изучаемые темы, их сложности и применение в прикладных задачах).
4. Поздравление с окончанием учебного года и началом каникул.

Литература

1. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1972.

2. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика: справочные материалы. – М.: Просвещение, 1988.

3. *Дорофеев Г.В., Седова Е.А., Шестаков С.А.* ЕГЭ. Математика. 2007–2008 гг. – М.: Эксмо, 2007.

4. *Егерев В.К., Кордемский Б.А., Зайцев В.В. и др.* Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1992.

5. *Зеленский А.С., Василенко О.Н.* Сборник задач вступительных экзаменов по математике. – М.: НТЦ «Университетский», 2001.

6. *Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др.* Алгебра и начала анализа: Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2001.

7. *Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н. и др.* 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 2000.

8. *Иванов А.С., Майоров Ю.К., Рурукин А.Н.* Сборник задач по тригонометрии и началам анализа. – М.: МИФИ, 1991.

9. *Мордкович А.Г. и др.* Алгебра и начала математического анализа: УМК. – М.: Мнемозина, 2010.

10. *Рурукин А.Н.* Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа 10–11 кл. (А.Н. Колмогоров и др.). – М.: ВАКО, 2004.

11. *Рурукин А.Н.* Ответы и решения к экзаменационным заданиям из сборника Г.В. Дорофеева и др. Математика. 11 класс. – М.: Интектэл, 2003.

12. *Рурукин А.Н.* Математика: Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004.

13. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений. – М.: Наука, 1988.

14. *Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.

Оглавление

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Рурукин Александр Николаевич

Хомутова Лариса Юрьевна

Чеканова Ольга Юрьевна

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ
ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА
к УМК А.Г. Мордковича и др. (*М.: Мнемозина*)

10 класс

Выпускающий редактор *Юлия Антонова*
Дизайн обложки *Анастасии Хомяк*

По вопросам приобретения книг издательства «ВАКО»
обращаться в ООО «Образовательный проект»
по телефонам: 8 (495) 778-58-27, 746-15-04. Сайт: www.obrazpro.ru

Приглашаем к сотрудничеству авторов.
Телефон: 8 (495) 507-33-42. Сайт: www.vaco.ru

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»

Подписано к печати 27.07.2011.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 18,48. Тираж 5000 экз. Заказ № 4195.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати — ВЯТКА» в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru
e-mail: pto@gipp.kirov.ru